SHUXUE SIXIANGSHI



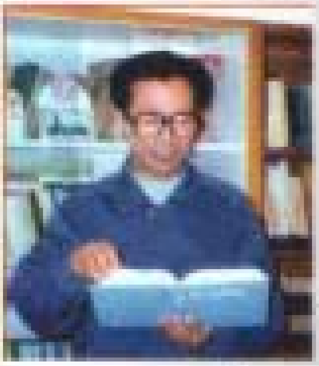
数学思想史

王树禾 著

国防工业出版社

http://www.ndip.com.cn

责任编辑：许波建
封面设计：彭建华



作者简介

王树禾，河北乐亭人，1938年生，毕业于北京大学数力系，中国科学技术大学教授。从事微分方程与应用数学研究与教学，在拟线性抛物型方程、多项式微分系统与离散数学等课题上发表论文30余篇。出版《微分方程与混沌》、《图论及其算法》、《经济与管理科学的数学模型》、《离散数学引论》、《数学聊斋》等著作18种。获中国科学院优秀教学成果一等奖和国家级教学成果二等奖等奖项。

ISBN 7-118-03124-0

9 787118 031249 >

ISBN 7-118-03124-0/O·196
定价：24.00元

数学思想史

王树禾　著

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书主要内容包括中国古代数学和希腊古代数学，近代与现代数学中的解析几何、微积分、离散数学、函数论、微分方程、非欧几何、概率、混沌、NPC理论以及数学哲学等主要数学分支的原始创新、重大成就的孕育、发展和完善的历史过程和重要数学思想。穿插介绍各学科主要代表人物的思想方法与其治学做人的可贵之处。本书史料翔实，文字简练生动，数学论证严谨易懂，集思想性、知识性、史料性于一册，是提高科学文化素质和增长知识的理想读本，可作为综合大学与师范大学的教材，亦可供有志者自学。

图书在版编目（CIP）数据

数学思想史/王树禾著．—北京：国防工业出版社，2003.4

ISBN 7-118-03124-0

Ⅰ.数…　Ⅱ.王…　Ⅲ.数学史－世界　Ⅳ.011

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第019950号

国防工业出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路23号）

（邮政编码　100044）

北京奥隆印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 850×1168　1/32　印张 14¾　385千字

2003年4月第1版　2003年4月北京第1次印刷

印数：1—4000册　定价：24.00元

前　　言

> 若欲预见数学的将来，正确的方法是研究它的历史和现状。
>
> ——庞加莱

本书是作者在中国科技大学数学系、00 教学实验班和少年班高年级主讲数学史课程的讲稿经整理编撰而成的。著书的初衷是为综合大学或师范大学数学等专业提供一部可读性与可教性都比较强的好用的教材，同时也为从事数学工作、数学教育的同志和数学爱好者提供一部参考书。

几千年的数学长河，已经汇成人类的智慧之海，其主要业绩不是这么一本小书可以包容的，加之本书作者学识有限，量时量力，只能选取若干主要学科分块撰写，对数学史上典型的事件和人物进行编录和分析。由于参阅了足够多的史料，史实似不会失真(个别年代各史料其说不一，大体上误差不大)，但分析则纯属作者的个人行为，未必准确，失误之处，盼望读者和行家批评指正。

全书共分 10 章，各章主要内容如下。

第一章讲述中国古代(从上古(约公元前 2000 年)到 14 世纪)数学的辉煌成就，其中商高定理、圆周率的近似值和中国剩余定理等是中国对人类科学的重大贡献；《九章算术》则是中果数学的王牌文献；刘、祖、祖、僧、秦、杨、李、朱是世人敬仰的八大数学家，他们的人品、才智和数学成果皆为后世之榜样。

可悲的是，由于中国的封建政治和中国古代数学的弱点，从 14 世纪到 20 世纪初，中国数学基本上停滞不前，落后于西方数学一大截，很值得我们搞数学的同志们深思，以便从中悟出中国数学

事业振兴的正确道路，把中国尽快建设成数学强国。值得我们探讨的具体历史事件很多，例如《庄子》中曰："一尺之棰，日取其半，万世不竭。"这已经是无穷小思想的萌芽；刘徽和祖暅在研究牟合方盖的体积以及建立"刘祖等幂等积定理"时，已经行至微积分门槛之下，为什么不再迈一步呢？

第二章讲述古希腊灿烂的数学成就和第一次数学危机，毕达哥拉斯、欧几里得、阿基米德和阿波罗尼斯四巨头的伟大业绩，是人类永远要继承的宝贵遗产。

毕达哥拉斯功过兼备，他乱提口号，打出"万物皆数"（他的数仅指正有理数）的旗帜，引火烧身，成了第一次数学危机的始作俑者。当然数学危机是好事，第一次数学危机使人们突破了正分数的局限，进而发现了无理数，后人戴德金等数学家的理论工作使实数理论日臻完善。

古希腊数学家提出规尺三大作图问题（化圆为方、倍立方和三等分角），貌似初等，引诱人们不停顿地冲击了2000余年不得其解，一直等到近世代数与数论的一些成果出现之后，才有了理论依靠而得证三大作图题用无刻直尺和圆规是不可解的。这正如一个人丢了钥匙，总在一个电线杆下而寻找，路人问他，为什么不到别处找找，失主答：其他地方没有路灯。一俟数学的"路灯"打开得多了，我们才能找到数学遗难问题的解答。有些数学问题，例如 $3x+1$ 问题、Ulam 猜想之类，在它们的理论根子没发掘出来之前，很难拔得动。理论（例如算术基本定理、代数基本定理、微积分基本定理等）的指导在数学中是首要的，拒绝理论思维，过分强调实践不是数学家的思想作风。

第三章讲述解析几何的历史，笛卡儿真了不起，他的坐标系为现代数学搭建了框架结构，而解析几何则使初等数学嬗变为高等数学，他有不朽名言：

"一切问题可以化为数学问题，
一切数学问题可以化为代数问题，
一切代数问题可以化为方程求解。"

此言虽有些偏颇，但很多时候确实如此。

在笛卡儿的思想和传统的中国数学思想启发下，我国著名数学家吴文俊、张景中等人在几何的机器证明领域取得了世界领先的成果。

笛卡儿的解析几何和数学史上任何重大成果一样，并非天才人物的突发奇想或空穴来风，都是在数学科学的历史积累之中孕育的，例如著名的"帕波斯问题"对笛卡儿的启发作用功不可没。

第四章讲述微积分史和第二次数学危机。

微积分是科学史上最为伟大的成就之一，它对人类科学技术的进步所起的作用，无论如何评价，也不为过。微积分的成果是牛顿与莱布尼兹"站在巨人的肩膀上"取得的，例如巴罗教授的"微分三角形"等就是点燃牛顿流数思想的火石。

牛顿与莱布尼兹虽属天才，但其初创的微积分，难免带有新生儿的稚气和表达缺欠，当初连他们自己也说不清楚流数的定义及其有关推理是否严格（当时其实是不严格的），在伯克莱的发难面前，显得十分被动，引起了第二次数学危机。对此本书做了不偏不倚的分析评述，并阐述在以后的两百多年里，各路数学家是如何加固微积分的基础的。

在数学的历史上，此种危机现象已多次发生，例如 $i=\sqrt{-1}$ 的出现曾被人贬为"诡辩量"，用它进行运算时感到"道德上的折磨"；罗巴切夫斯基提出非欧几何时，大多数数学家认为这种几何是"荒唐透顶的伪科学"。19 世纪傅里叶创立三角函数时的情景如出一辙，由于基础不牢，弄得傅里叶的稿子多次审查都通不过而退稿，后来还是狄里克利给出傅氏级数收敛性定理才算成功，应证了达兰贝尔的名言："向前进，你就会产生信念。"

第五章讲述离散数学史和第三次数学危机。一则好似笑话的罗素悖论，弄得天才数学家康托尔的集合论不能自圆其说，惹出第三次数学危机，直到朴素集合论蜕变为公理集合论时，才平息了轰动一时的第三次数学危机。敢问：是否还会有第四次乃至第 $n+1$ 次数学危机呢？

哥德尔是古今数学家中最具思想家气质的一位哲人，他提出不可判定的所谓“哥德尔命题”，一举推翻了20世纪鼓舞人心的“希尔伯特纲领”，恰似晴天霹雳般惊醒了20世纪一派升平乐观的数学界，大家不得不承认公理系统中未必是无矛盾的太平盛世。

图灵定义了什么是计算，而库克和卡普则开发出一个所谓NPC问题集团，计算机数学面临着严酷的挑战。

数论与代数中的诸多遗难问题是否与计算复杂度或不可判定性理论有关系呢？

第六章讲述复变与实变函数论以及变分法与泛函分析的历史。

复变函数论被誉为19世纪数学的享受，是纯数学与应用数学当中最为优秀的理论系统之一。

外尔斯特拉斯等人构造了点点连续但点点不光滑的函数实例，皮亚拿则给出一条能装满一个正方形（或长方形）的若当曲线，种种鬼怪式的函数使得人们觉得还需要对实变函数进行更细数的探讨，进而发展出实变函数论这样一个深刻精彩的主要研究可测函数与各种积分理论的数学分支。

伯努利家族提出的速降线与悬链线问题的挑战，促生了变分法与泛函分析两个现代学科。泛函方法则是现代数分方程研究的最重要的数学手段之一，例如广义函数与不动点定理等，是研究非线性方程解的存在唯一性的理论基础。

第七章讲述微分方程史，分别介绍常微分方程、常微分方程定性理论和偏微分方程的发展轨迹。

一则表达简洁的黎卡提方程

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

的求解问题难住了包括欧拉和莱布尼兹在内的众多著名数学家，150余年不得其解，直到1841年刘维尔证明黎卡提方程一般不存在初等函数的积分表达的解，才使人们求通解的奢望开始收敛，转向方程的适定性研究。从19世纪开始，以庞、李、班、白4位杰出

数学家为首,开展了运动稳定性和定性理论的研究,后来,苏联的力学家安德罗诺夫和盲人数学大师庞特列雅金建立了结构稳定性理论。随着定性理论的发展,冲击希尔伯特第 16 问题的势头风起云涌,20 世纪 50 年代,苏联权威学者发表文章说二次系统的极限环最多者恰 3 个,一时间为之轰动。1976 年,中国数学家们给出有 4 个极限环的二次系统的实例,于是得出二次系统的极限环个数最多者不少于 4 个,但至今未证明或反驳存有 5 个极限环的二次系统。至于高次多项式系统的极限环个数问题,恐怕不是近期可以解决的。

非线性方程中的内容非常之丰富,对于哈密顿系统,20 世纪建立了最富盛名的 KAM 定理,从常微分方程的定性理论蜕变出一个富有生命力的数学分支——微分动力系统。

微分方程是一个十分有用又十分有魅力的学科。1917 年和 1925 年两次出任法兰西共和国总理的班勒卫博士对微分方程有深入研究和重要贡献,他是法国著名数学家,巴黎科学院院士,1920 年曾访问北京大学并对中国的科学研究提出了建设性意见。

偏微分方程是数学的中心学科之一。人们对热传导、电磁场和弦振动等物理问题建立的数学模型开创了近代偏微分方程的研究,傅里叶为解热传导问题发明了函数的三角级数展开方法,以此级数为工具,求得了不少重要的线性偏微分方程的解,三角级数是 19 世纪最精彩的数学创造之一。

对偏微分方程有奠基性贡献的一位传奇式人物是柯瓦列夫斯卡雅,她对非线性偏微分方程组的柯西问题建立且证明了解析解的存在唯一性定理,还因成功解决有“百年数学水妖”之称的关于刚体绕定点转动规律问题而获法国科学院大奖,这一问题把很多大数学家难住达上百年;柯瓦列夫斯卡雅的道德文章是今天每个有志科学研究的年轻朋友的榜样,她的名言则是做人做学问的信条:

“说你知道的话,
干你应干的事,
成为你想做的人。”

第八章讲述《几何原本》的内容和罗巴切夫斯基等人非欧几何的工作成就、欧几里得的《几何原本》是数学史上影响最为深远的名著，至今它的主要内容仍列入中学生的必修课。《几何原本》中的第五公设在数学史上惹出了极大的麻烦，证又证不明，接受起来又不情愿，于是有人考虑什么样的两条直线平行？三角形的内角和究竟是多少度等深刻的问题，出现了与欧几里得相左的所谓非欧几何(也称为反欧几何)。于是相反相成、是非并存的几何同时在数学中流通，搞非欧几何的革新家的才智和胆量(也有胆怯的，例如伟大的数学家高斯)实为近世数学界的骄傲。

第九章讲述不确性数学，主要谈概率与混沌两个学科。

概率论是从诸如掷骰子、分赌本之类不入大雅之堂的事情入手渐渐发展出来的，但它的大数定律和中心极限定理却是现代数学当中最为高雅、最富哲理和有广泛用途的数学理论之一，能从随机事件中找出确定的规律性，这种数学确实生动诱人。

混沌是20世纪四大科学成就之一，另3个是量子力学、相对论和电子计算机。混沌是确定性系统中变化极端复杂和行为不可预测的同义语，作为极现代(1975年混沌作为数学名词首次出现)的数学概念则是指轨线对初值的敏感、拓扑传递和有处处稠密的周期点等内涵丰富的一种数学表现。正如科学家格莱克所说："混沌排除了拉普拉斯决定论的可预测性的狂想。"混沌之父洛伦兹形象地描述混沌说："巴西境内的一只蝴蝶扇动翅膀，可能引起德克萨斯州的一场龙卷风。"

第十章讲述历史上各数学学派的主张和代表人物的思想以及各派间的争论。涉及什么是数学、数学为什么要证明、纯数学与应用数学有否高低贵贱之分、数学家是些什么人等问题。

希望本书能使想做数学家的年青朋友得到某些启发与借鉴，学习牛顿和高斯等从何处下手找到切入点，来创造新的概念和理论、学习柯西和外尔斯特拉斯等如何对一门不够严格的新生数学分支进行理论装修。本书作者也祝愿不想以数学为职业的读者喜欢数学，读一些数学史上的名人名言。事实上，数学是一种高层次

文化，可以提高我们的文化修养和科学素质。数学会使人上瘾，即使你想驱除它，也别指望真的能驱除得了。数学的历史和你本人的体验一定会证明这一点。但愿这本书能成为你永远的好朋友。

本书是中国科学技术大学教材审批委员会组织的指令性选题，作者对中国科学技术大学数学系和教务处对本书写作的支持深表感谢。

王树禾

2003 年 1 月

目　录

第一章　辉煌的中国古代数学

周公问于商高曰："夫天不可阶而升，地不可得尺寸而度，请问数安从出？"商高答曰："勾广三，股修四，径隅五。"

——《周髀算经》

中华民族，善良勤奋，睿智机敏，数学科学乃我之所长。从公元前20世纪到14世纪，上下3000多年之间，我国在数学科学上取得了丰硕成果，为人类的科学文化做出辉煌贡献，不朽的数学典籍不可屈指而数，著名者即有11部：

《周髀算经》　《九章算术》　《海岛算经》
《孙子算经》　《张邱建算经》《五曹算经》
《五经算术》　《辑古算经》　《数术记遗》
《夏侯阳算经》《数书九章》

其中以《周髀算经》为最早，以《九章算术》和《数书九章》为最优。

出于中国古代数学家之手的重要数学成果非常之多，其中有不少是里程碑式的成就，例如：

(1)商高定理(勾股定理)；
(2)刘徽与祖冲之的圆周率近似值；
(3)祖暅定理；
(4)一行的二次不等距内插法；
(5)秦九韶的"大衍求一术"(中国剩余定理)；
(6)杨辉三角；
(7)李冶的天元术；
(8)朱世杰的四元术与高阶等差级数，等。

其中魏国人刘徽(263年)为求 π 而发明的"割圆术"，战国时

代惠施的名言："一尺之棰，日取其半，万世不竭。"和《九章算术》中的名题："女子善织，日自倍"(即 $1+2+2^2+\cdots+2^n+\cdots$)已经来到极限、无穷小量和发散几何级数的大门口，差一步就可以登堂入室了；更有祖暅与刘徽的"等幂等积定理"曰："夫叠棋成立积，缘幂势既同，则积不容异。"说的是两立体被任取定的平行于给定平面的平面所截，若两方截面面积(幂)相等，则两立体体积相等。刘祖定理与现代微积分中的定积分思想是一致的，用现在的符号可以把"等幂等积定理"改述成：V_1 与 V_2 是两立体之体积，平行于 yoz 平面的平面截 V_1 与 V_2 所得的截面面积 $A_1(x)=A_2(x)$，$x\in[a,b]$，则

$$V_1=\int_a^b A_1(x)\mathrm{d}x=\int_a^b A_2(x)\mathrm{d}x=V_2$$

其中 a 与 b 分别是两立体的最低点与最高点高度(设 x 轴与水平面垂直)。

是什么原因阻碍了中国数学家走到微积分的门槛却止步了呢？

本章拣最耀眼的成就展示我国古代数学家的工作思路、技巧，也讲先辈们的人品与个性，同时分析我国古代数学的弱点和人文社会意义下使得中国数学兴衰的原因。

1 《周髀算经》与勾股定理

1.1 勾股定理

我国古代能计算一些特殊图形的面积和特殊立体的体积，更有刘徽及《九章算术》中众多实际问题的计算，皆得益于勾股定理之助，所以有"几何即勾股"的口头禅，一语道破勾股定理对于几何学研究之重要性。事实上，时至今日，不论是初等数学还是高等数学，如果欲从其中选举一个不可或缺的重要定理，大多数明白人还是会投勾股定理的票。初等数学自不待说，就是以微积分为骨干的高等数学，谁敢说他不靠勾股定理就可以进行计算与证明！例

如弧微分公式的导出、方向导数的计算、曲面法线的方向余弦进而求曲面面积等,不都是靠勾股定理为主要工具完成的吗?

在勾股定理的发现与证明过程中,我国古代数学家功不可没。

中国关于勾股定理的记载首见于《周髀算经》。《周髀算经》是中国古代(公元前 200 年左右)一部天文学著作,作者已不可考。髀是股骨,周髀是周朝测量日光影长的工具,长 8 尺,这种记录很值得推敲,即使是牛的大腿骨,也没有这么长,可能是几根牛的或人的大腿骨捆接在一起做成的。

周公其人,身为西周宰相,多才多艺,既能事君主治臣民,又能祭鬼神观天相,他曾向长于计算的商高问及测算天高之事,商高官至"史策"级,即后来的太史令,负责星相观测和祭天事仪,也带头搞些占卜迷信活动,周公与商高皆西周初年的要人,距今约 3000 多年了。《周髀算经》卷首记述了一段在数学史上极有地位的对话:

周公问商高:天没有阶梯可以攀登,地没有尺子可以度量,请问怎么求得天之高地之广呢?商高回答说:按勾三股四弦五的比例去算。见图 1.1。

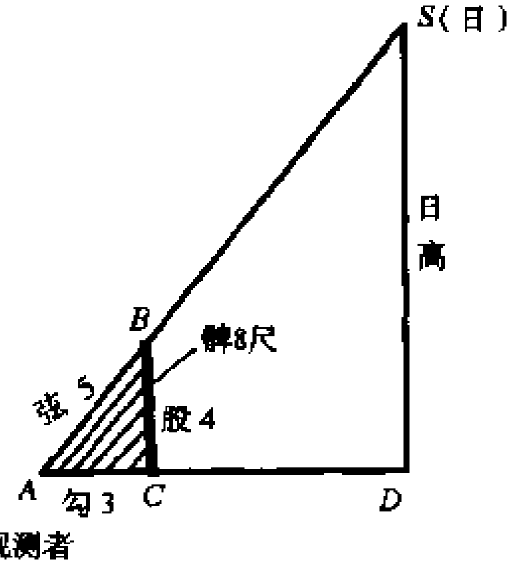


图 1.1

由周商二人的对话可以推测当时商高可能知道一点有关三角形相似的道理,当时的髀为 8 尺,即 $BC=8$,$\triangle ABC$ 中三边之比为

$AC:BC:AB=3:4:5$。
又因为

$$\frac{SD}{BC}=\frac{AD}{AC},SD=\frac{BC\times AD}{AC}$$

即日高为髀高8尺乘以地长 AD 再除以髀之影长 $AC=6$ 尺。但 AD 怎么测出呢？可见商高用这种办法想测日高是不可能实现的。

《周髀算经》上又把“勾三股四弦五”推广成商高定理：

“求斜至日者，以日下为勾，日高为股，勾股各自乘，并以开方除之，得斜至日”。

用现在的话说就是直角三角形斜边之长是两直角边平方和的算术平方根。至此，在我国经典著作中一般形式的勾股定理已明确地载入史册，后人称其为商高定理，古希腊人则称其为毕达格拉斯定理，现代称其为勾股定理。

1.2 勾股定理的证明

商高和《周髀算经》并未给出勾股定理的证明，我国证明勾股定理的第一人是赵爽；赵爽字君卿，东吴人，生平不详，约生活于公元3世纪初，他学识渊博，熟读《周髀算经》并为之做序，在赵的《周髀算经序》中说：“爽以暗蔽，才学浅昧，负薪余日，聊观周髀。”其谦逊和蔼的品格令人钦佩。他敬重周公，严格律己，赵说：“周公位居冢宰，德则至圣，尚卑己以自牧，下学而上达，况乎凡乎？”赵爽要求自己“不能自料，则访之贤者。”在做学问上他主张“累思”，即反复深入地思考，他说：“累，重也，若诚能重累思之，则达至微之理。”他要求自己“言约旨远，问一事而万事达。”

赵爽对勾股定理给了一个高水平证明，见图1.2，这几乎是一篇“无字论文”，构思之巧妙，推理之严格、之简洁，令千载后人为之叫绝。阮元在《畴人传》中称赵爽的工作“精深简括，诚算氏之最也。”从赵爽的图1.2可以看出，正方形 $ABCD$ 的面积是4个“朱（红）实”加上一个“黄实”，即

$$c^2=\left(\frac{1}{2}ab\right)\times4+(b-a)^2=a^2+b^2$$

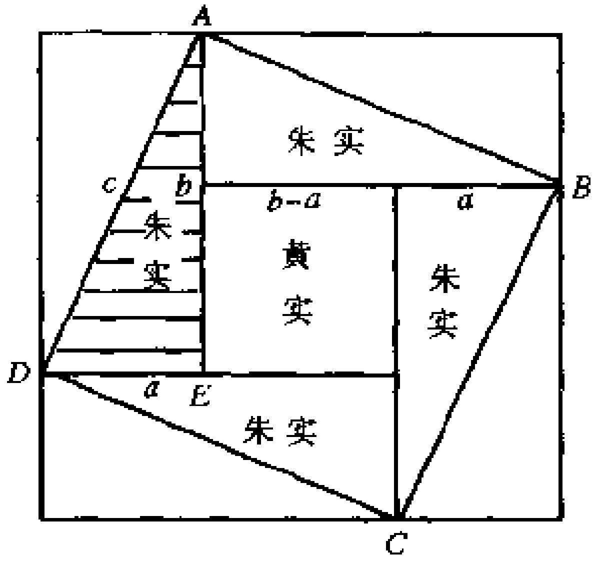


图 1.2

即直角三角形△ AED 的斜边之平方等于其两直角边平方和。

以时间之先后而论，证明勾股定理的第一人是古希腊的毕达哥拉斯(Pythagoras，约公元前 580 年至公元前 500 年)，我国发现勾股定理比希腊早 500 年左右，证明勾股定理比古希腊晚 800 年左右。在毕达哥拉斯之后，各国数学家给出 370 多种载入史册的证明，其中古希腊的欧几里得(Euclid，约公元前 330 年至公元前 275 年)给出了一个称为“新娘的椅子”(The bride's chair)的证明，见图 1.3，记载于《几何原本》第一卷(第 47 定理)。可以看出，欧氏的“新娘的椅子”不如赵爽的“朱实黄实”那么精美易懂。

事实上，不难看出

$$AC^2 = b^2 = 2\triangle JAB =$$
$$2\triangle ACD = \text{长方形 } ADKL$$

同理知

$$BC^2 = a^2 = \text{长方形 } BEKL$$

于是

$$AC^2 + BC^2 = \text{长方形 } ADKL + \text{长方形 } BEKL = \text{正方形 } ABED = c^2。$$

1876 年，美国第二十届总统加菲尔德(J. A. Garfield，1831—1881)给出了另一个勾股定理的精彩证明如图 1.4 所示。

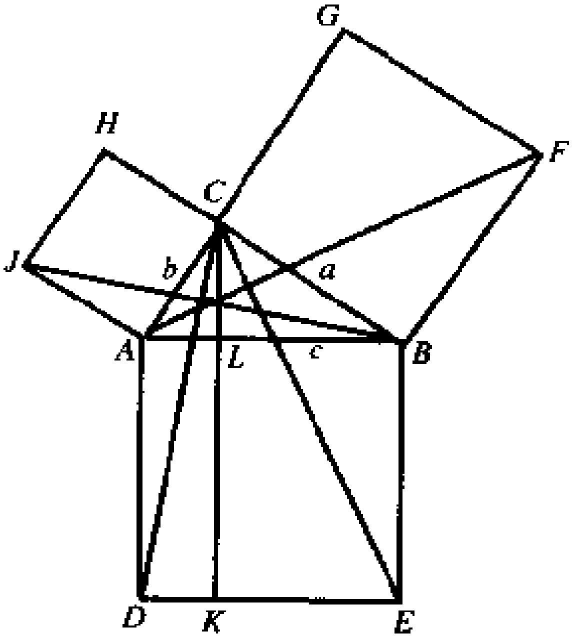


图 1.3

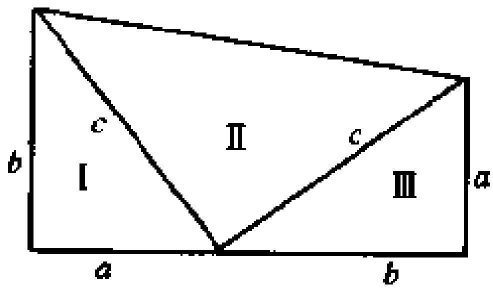


图 1.4

事实上,梯形面积为△Ⅰ +△Ⅱ +△Ⅲ,于是

$$(a+b)\times(a+b)\times\frac{1}{2}=$$

$$\frac{1}{2}ab\times2+\frac{1}{2}c^2$$

故得

$$a^2+b^2=c^2$$

这位总统给出的证明图形之简明,计算之便捷确实有总统级水平。

1.3 勾股数

满足方程 $x^2+y^2=z^2$ 的 3 个正整数 x,y,z 称为勾股数。

图 1.5 是美国哥伦比亚大学普林顿(G.A.Plinpton)收藏馆第 322 号文物,原件是古巴比伦人用楔形文字写在泥板上的,制成时间大约为公元前 1900 年至公元前 1600 年。巴比伦是四大文明古国之一(另三国是埃及、印度和中国),位于两河(幼发拉底河和底格里斯河)平原(今伊拉克)。巴比伦人民对世界数学有过杰出贡献,例如公元前 15 世纪就会计算矩形、直角三角形、梯形的面积和平行六面体的体积,知道使用勾股定理,比中国早 600 年左右发现勾股定理。图 1.5 中的两列数字是直角三角形的斜边与直角边的长,相应的勾股数表见表 1.1。至于图 1.5 中的数表是何人何地何日所做,今日他的后代又是何人,已不可考,但它说明巴比伦人之中不乏绝顶聪明者;古印度的《吠陀经》中也记载了勾股定理,他们发现的勾股数表为:

(3,4,5), (12,16,20), (8,15,17),
(15,36,39), (5,12,13), (15,20,25),
(12,35,37)。

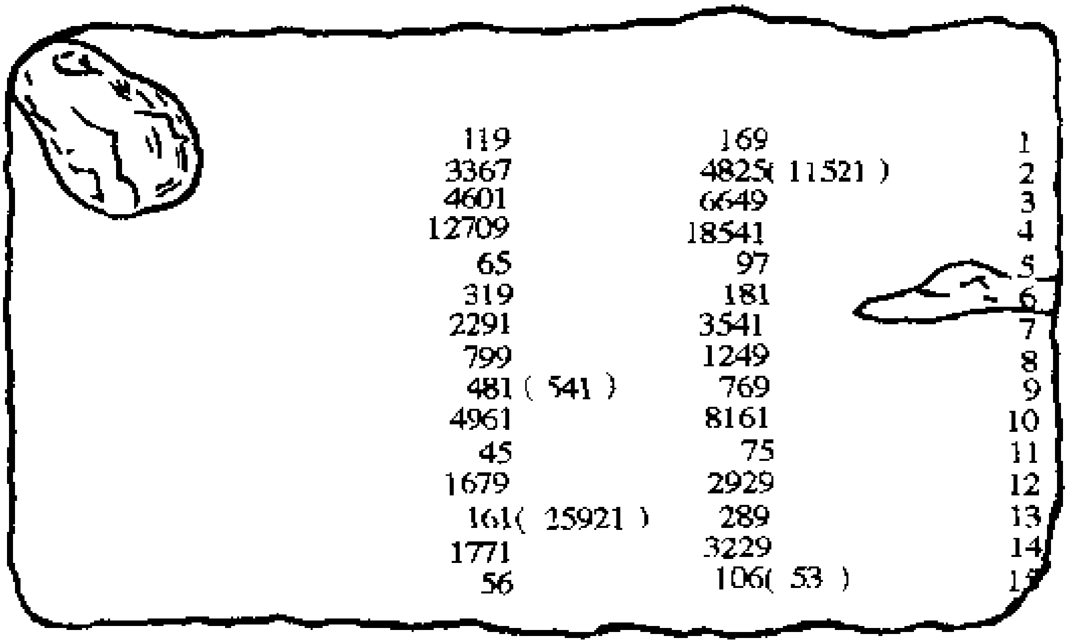


图 1.5

《吠陀经》中记载勾股定理的所谓《绳法经》,成书于公元前 8 世纪至公元前 2 世纪。

表 1.1

a	b	c	u	v
120	119	169	12	5
3456	3367	4825	64	27
4800	4601	6649	75	32
13500	12709	18541	125	54
72	65	97	9	4
360	319	481	20	9
2700	2291	3541	54	25
960	799	1249	32	15
600	481	769	25	12
6480	4961	8161	81	40
60	45	75	2	1
2400	1679	2929	48	25
240	161	289	15	8
2700	1771	3229	50	27
90	56	106	9	5

1938 年发掘出《开罗数学草纸书》,考证得知此书写于公元前 300 年左右,上写有勾股数 3 组:

$$(3,4,5),(5.12,13),(20,21,29)$$

且给出验证。《开罗数学草纸书》上有下列两题:

(1)一梯 10(腕)尺长,梯足至墙 6 尺,求梯子可达到的高度。

(2)一长方形面积 60 平方尺,对角长 13 尺,求长与宽。

由此种题目可知古埃及人对勾股定理已心知肚明,且能实际应用它,埃及的勾股定理见诸文字的时间和中国的《周髀算经》成书时间大致相同。

古希腊柏拉图(公元前 380 年)给出公式

$$(2m)^2+(m^2-1)^2=(m^2+1)^2 \quad (m\text{ 为自然数})$$

得出无数组勾股数

$$(2m,m^2-1,m^2+1) \tag{1.1}$$

$$m^2+\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2 \quad (m\text{ 为奇数})$$

得出无数组勾股数

$$\left(m,\frac{m^2-1}{2},\frac{m^2+1}{2}\right) \tag{1.2}$$

但公式(1.1)与公式(1.2)并未包含一切勾股数。

2 中国古代最优秀的数学经典——《九章算术》

《九章算术》是我国古代数学成就之集大成者,它是何年何地何人所写,尚无定论,大约是汉代人之作,作者亦未必是一人,后经刘徽等人作注,现在我们见到的《九章算术》多为刘注本。

《九章算术》全书分为9卷,事实上,它是由246道题组成的一本算术习题集,每题的已知条件是具体的数目,不谈一般情形的相应问题,各题之间亦不追求数理上的联系。题目的陈述十分简洁,不加任何解释。

每题之后有两则极简短的作注者附言,一是“答曰”,一是“术曰”;“答曰”给出答案,“术曰”论述具体计算过程或方法。

除刘徽外,南北朝的祖冲之、祖暅、甄鸾、徐岳,唐代的李淳风,北宋的贾宪,南宋的杨辉,清代的焦循、李潢等人,都对《九章算术》做过妙注。

由于《九章算术》内容丰富多彩,已译成俄、德、日、英等多种文字在全世界出版发行,对世界数学教育和数学科学产生了可观的积极作用。

由于《九章算术》题文用古汉语写出,下面对其词语做必要的注释,且对题目的解法用现在的数学表达方式做了一些点评,用[注解]标出;题目从(1)到(246)加了编号(题目的标点及简化汉字为现代人所为[1])。

第一卷 方田

[注解]方田即计算田地的面积。

(1)今有方田广十五步,纵十六步,问为田几何?

[注解]广即宽,纵即长,方田指长方形田地。所以其面积为(一步等于5尺)

$$长 \times 宽 = \frac{16}{2} \times \frac{15}{2} = 60(平方丈) = 1 亩。$$

矩形面积等于长乘宽这一数学金律在现代数学中亦有大用，在定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的定义中 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 就是广为 Δx_i，纵为 $f(\xi_i)$ 的一个小矩形之面积。

(2)、(3)、(4)三题与(1)题雷同，只是具体数据有变，皆为“有田广 a，纵 b，问为田几何?”这种题型。

(5)今有十八分之十二，问约之得几何?

[**注解**]此题讲 $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$，我古代先人在2000年以前已知分数约分方法与既约分数的概念。

(6)题与(5)题是同一题型，反映了汉代数学家已能判定两整数互素(既约)。

(7)今有三分之一，五分之二，问合之得几何?

(8)又有三分之二，七分之四，九分之五，问合之得几何?

(9)又有二分之一，三分之二，四分之三，五分之四，问合之得几何?

[**注解**]这3个题是分数加法，反映了当时已掌握了通分(即最小公倍数)的分数加法技术。

(10)今有九分之八，减其五分之一，问余几何?

(11)又有四分之三，减其三分之一，问余几何?

[**注解**]“减其”指“减去”，不是 $\frac{8}{9}$ 减去 $\frac{8}{9}$ 的 $\frac{1}{5}$。这两题是分数减法，当时已掌握分数减法的技术。

(12)今有八分之五，二十五分之十六，问孰多? 多几何?

[**注解**]分数大小比较与分数减法。

(13)题、(14)题与(12)题是同一题型。

(15)今有三分之一，三分之二，四分之三，问减多益少，各几何而平?

[**注解**]“减多益少”，把多的减去一些给小的数加上;“各几何

而平”，各个数减去几或加上几而得平均值；可先求三个分数的平均值，再求各数与平均值的差。

(16)题与(15)题是同一题型。

(17)今有七人，分八钱三分钱之一，问人得几何？

［注解］“八钱三分钱之一”即 $8\frac{1}{3}$ 钱。

(18)又有三人三分人之一，分六钱三分钱之一，四分钱之三，问人得几何？

［注解］$\left(6\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)\div 3\frac{1}{3}=2\frac{1}{8}$(钱)。

(19)今有田广七分步之四，纵五分步之三，问为田几何？

［注解］(20)～(24)各题与(19)题是同一题型，运算上皆分数乘法，至此知当时已掌握分数的加、减、乘、除四则运算。

(25)今有圭田，广十二步，正纵二十一步，问为田几何？

［注解］“圭田”即三角形田，“正纵”指三角形的高，“广”指三角形的底边长。

(26)题与(25)题为同一题型，当时已知三角形面积 $=\frac{1}{2}$ 底长 $\times$ 高。

(27)今有斜田，一头广三十步，一头广四十二步，正纵六十四步，问为田几何？

［注解］“斜田”即梯形田，“一头”、“一头”分别指梯形的上下底，“正纵”为梯形的高，当时已知

$$梯形面积=\frac{1}{2}(上底长+下底长)\times 高$$

(28)又有斜田，正广六十五步，一畔纵一百步，一畔纵七十二步，问为田几何？

［注解］“正广”指直角梯形的高，“一畔”、“一畔”指下底与上底。

(29)今有箕田，舌广二十步，踵广五步，正纵三十步，问为田几何？

［注解］“箕田”指等腰梯形之田，“舌”指下底，“踵”指上底，“正

纵”是高。

(30)题与(29)题为同一题型。

(31)今有圆田,周三十步,径十步,问为田几何?

[注解]“周”指周长,“径”指直径,当时 π 取 3,即用圆的内接正六边形的周长近似圆周长,

$$圆面积 = 3 \times r^2$$

其中 r 是半径,$r = \frac{1}{6}$周长。

当时已知圆的周长公式为 $2\pi r$,圆面积为 πr^2。

(32)题与(31)题为同一题型。

(33)今有宛田,下周三十步,径十六步,问为田几何?

[注解]“宛田”是山头上球冠形田地,犹如一只扣着的碗,故名为宛田。“下周”指球冠底圆周长.“径”指垂直球冠底面的过底面中心的平面与该球冠的交线。

《九章算术》中“答曰”:一百二十步。

这个答案是不正确的,它是$\frac{1}{4}$ × “下周” × “径”算出的。

事实上,由于“下周”30,面“径”为 $16 > \frac{1}{2} \times 30$,可知此宛田超过了半球面,见图 1.6(此题脱离实际)。

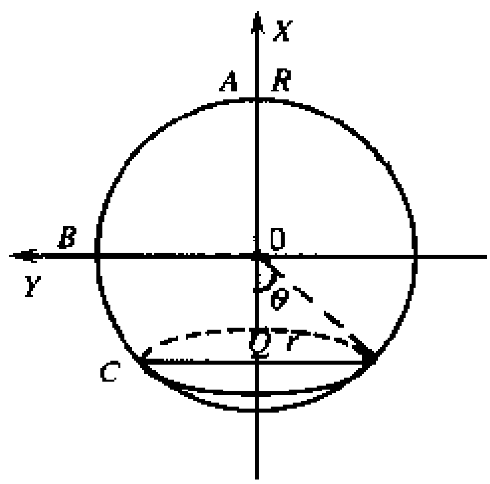


图 1.6

“宛田”是$\widehat{ABC}$绕 x 轴旋转所得旋转体的体积,$\widehat{ABC}$的函数表

达式为

$$y=\sqrt{R^2-x^2}$$

代入旋转体侧面积公式得

$$S_{\text{宛田}}=2\pi\int_a^R y(x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=$$

$$2\pi\int_a^R \sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+(\sqrt{R^2-x^2}')^2}dx=$$

$$2\pi\int_a^R \sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}dx=$$

$$2\pi R(R-a)\qquad(a<0)$$

其中 R 与 a 满足方程

$$\begin{cases}a^2+r^2=R^2\\2\pi r=30\\\dfrac{|a|}{r}=\operatorname{ctg}\theta\\R(\pi-\theta)=8\end{cases}$$

可见《九章算术》中有的实际问题的难度已经直抵现代数学，不可等闲视之。

(34)题与(33)题同一题型。

(35)今有弧田，弦三十步，矢十五步，问为田几何?

[注解]“弧田”，弓形田地，“矢”是弓形所在圆的半径减去弦心距，即弓形的高，它恰似弦上之矢。

(36)题与(35)题为同一题型。

(37)今有环田，中周九十二步，外周一百二十步，径五步，问为田几何?

[注解]“径”指外圆半径与环形的内圆半径之差。

(38)题与(37)题为同一题型。

第二卷　粟米

[注解]本卷讲的是各种谷物如何折合交易。

[注解]粟米之法即各种谷物的折算比例。

粟率五十，　　　粝米三十，　　　粺米二十七，
糳米二十四，　　御米二十一，　　小䵂十三半，
大䵂五十四，　　粝饭七十五，　　粺饭五十四，
糳饭四十八，　　御饭四十二，　　菽荅、麻、麦各四十五，
稻六十，　　　　豉六十三，　　　飧九十，
熟菽一百三半，　糵一百七十五。

(39)今有粟一斗，欲为粝米，问得几何？

[注解]粟米:粝米 = 50:30 = 5:3，于是

$$粝米 = \frac{3}{5} \times 粟米 = \frac{3}{5} \times 1\ 斗 = 6\ 升$$

(40)～(69)皆与(39)题同一题型。

(70)今有钱一百六十，买瓴甓十八枚，问枚几何？

[注解]"枚几何"即每个瓴甓多少钱。

(71)今有出钱五千七百八十五，买漆一斛六斗七升太半升，欲斗率之，问斗几何？

[注解]"太半" = $\frac{2}{3}$，"斗率之"，以斗为单位计算，"斗几何"，每斗多少钱。

(72)题～(75)题与(71)题同一题型。

(76)今有出钱五百七十六，买竹七十八个，欲其大小率之，问各几何？

[注解]"欲其大小率之"，即分大小两种来计算。

设大竹每根 x_1 元，共 y_1 根，小竹每根 x_2 元，共 y_2 根。则有二次不定方程

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 78 \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 = 576 \end{cases} \tag{1.3}$$

此题欲求式(1.3)的正整数解。

中国古代数学家不喜欢(不善于?)解这种一般性的问题，而是动用聪明机智，就事论事地给出一个具体算法：在本题中，576 ÷ 78 商 7 余 30，如果每根竹付 7 枚钱币，就少给了卖主 30 币，30 根大一点的竹于每根加价一枚钱币，其余的还按每根 7 枚钱币来卖，即

$$x_1 = 8, y_1 = 30, x_2 = 7, y_2 = 78 - 30 = 48$$

此组解恰满足式(1.3)。

但式(1.3)并非惟一解，例如 $x_1 = 9, y_1 = 36, x_2 = 6, y_2 = 42$ 也是解。

为什么浅尝辄止，不对不定方程进行理论探讨呢？

(77)题～(84)题与(75)题为同一题型。

同类题过多，《九章算术》似有一定程度的同水平重复之嫌。

第三卷　衰分

[注解]衰分讲的是物价、购谷、奉禄及纳税等的分配比例问题。

(85)今有大夫、不更、簪裛、上造、公士，凡五人，共猎得五鹿，欲以爵次分之，问各得几何？

[注解]在封建等级社会，分配不公，“以爵次分之”，即按等级之高低以等差级数的规则来分配，设簪裛分得 a，则

$$(a-2d)+(a-d)+a+(a+d)+(a+2d)=5$$

求得 $a=1$，即簪裛分得一只鹿。由于 $a-2d>0$，即公士虽分得最少，但也不能一点不给，所以可以取 $d=\frac{1}{3}$，于是大夫分得 $a+2d=1+\frac{2}{3}=1\frac{2}{3}$只鹿。不更分得 $1\frac{1}{3}$只，上造分得 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$只，公士分得 $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$只，显然这不是唯一解，例如还有一种分配方案为

$$1\frac{2}{4}, 1\frac{1}{4}, 1, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}$$

事实上可以有无穷多种方案。

(86)今有牛、马、羊食人苗，苗主责之粟五斗，羊主曰：“我羊食半马”；马主曰：“我马食半牛”，今欲衰偿之，问各出几何？

[注解]这是等比级数求和的题目，设牛主被罚 x 斗粟，则

$$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}=5$$

从而解得牛、马、羊各罚几斗粟。

(87)今有甲持钱五百六十，乙持钱三百五十，丙持钱一百八十，凡三人俱出关，关税百钱，欲以钱数多少衰出之，问各几何？

[注解]这是一道百分数算术，设税率为 $x\%$，则(当时不用小数表示)

$$(560+180+350)x=10000$$

求得 x 后，$560x\%$，$350x\%$，$180x\%$ 分别为甲、乙、丙 3 人的关税。

(88)今有女子善织，日自倍，五日织五尺，问日织几何？

[注解]设第一天织 a_1 尺，第二天织 a_2 尺等，于是由等比级数之和有(日自倍，即公比 $a=2$)：

$$S=\frac{a_1(1-2^5)}{1-2}$$

解出 a_1 后，$a_2=2a_1$，$a_3=4a_1$，$a_4=8a_1$，$a_5=16a_1$。

(89)今有北乡算八千七百五十八，西乡算七千二百三十六，南乡算八千三百五十六，凡三乡，发傜三百七十八人，欲以算数列衰出之，问各几何？

[注解]“乡算”指全乡人口总数，县令欲按一定百分比从各乡征劳役，设百分比为 $x\%$，则

$$(8758+7236+8356)x=37800$$

解出 x 后，$8758x\%$，$7236x\%$，$8356x\%$ 分别为北乡、西乡与南乡的被征人数。

(90)今有禀粟，大夫，不更，簪裹，上造，公士，凡五人，一十五斗；今有大夫一人后来，亦当禀五斗，仓无粟。欲以衰出之，问各几何？

[注解]领取奉禄(粟)依阶级等差而供，大夫领五斗，五人分完后，又来一位大夫，也要求分得五斗；这时仓内已无粮，只好前五位每人退出一些交给后来的这位大夫，当然大家拿出的数量也要成等差数列，且前后两位大夫所得一样多，设簪裹拿出 x 斗，则

$$(x+2d)+(x+d)+x+(x-d)+(x-2d)=5-(x+2d)$$

$$6x+2d=5 \qquad (3>x\geqslant 2d\geqslant 0)$$

这是有约束的不定方程，可以有无穷多解，例如取 $d=\frac{1}{4}$，则 $x=\frac{3}{4}$，于是大夫拿出 $1\frac{1}{4}$ 斗，不更拿出 1 斗，簪裹拿出 $\frac{3}{4}$ 斗，上造拿出 $\frac{2}{4}$ 斗，公士拿出 $\frac{1}{4}$ 斗。

(91)今有稾粟五斛，五人分之，欲令三人得三，二人得二，问各几何？

[注解]"三人得三"指有三人每个得三份，"二人得二"指其余二人每人得两份。于是每份为

$$5\div(3\times3+2\times2)=\frac{5}{13}(\text{斛})$$

(92)今有大夫、不更、簪裹、上造、公士，凡五人，共出百钱，欲令高爵出少，以次渐多，问各几何？

[注解]此题与(85)题数学上解法相似，"高爵出少，以次渐多"即按等差级数来"出钱"，不过官越大越少出，可想而知，百姓在最低层，"出钱"最多，等级特权的思想与行为，似为中国之传统，当大官的对社会多占有少付出，实在可恨。

(93)今有甲持粟三升，乙持粝米三升，丙持粝饭三升，欲令合而分之，问各几何？

[注解]已知粟率为五十，粝率为三十，粝饭率为七十五。得知分配的"权数"比为

$$\text{甲}:\text{乙}:\text{丙}=1:\frac{5}{3}:\frac{10}{15}$$

于是

$$\text{甲应分得 }9\times\frac{1}{1+\frac{5}{3}+\frac{10}{15}}=2\frac{7}{10}\text{升}$$

$$\text{乙应分得 }9\times\frac{\frac{5}{3}}{1+\frac{5}{3}+\frac{10}{15}}=4\frac{5}{10}\text{升}$$

$$丙应分得 9\times\frac{\frac{10}{15}}{1+\frac{5}{3}+\frac{10}{15}}=1\frac{8}{10}升$$

《九章算术》中没有说清是怎么个“合而分之”,若是硬把3种粮食混合在一起,再按上述分配数额去分,分得的“杂合粮”怎么吃?我们猜想,可能是甲分每种粮$\frac{1}{3}\times2\frac{7}{10}$升,乙分每种粮$\frac{1}{3}\times4\frac{5}{10}$升,丙分每种粮$\frac{1}{3}\times1\frac{8}{10}$升。

(94)今有丝一斤,价值二百四十,今有钱一千三百二十八,问得丝几何。

[**注解**]设可买丝x斤,则有比例式$\frac{240}{1}=\frac{1328}{x}$。

(95)题~(104)题皆同此类比例题。

第四卷 少广

[**注解**]“少广”指长方形的短边,第四卷用少广做标题,表示讨论有关长度的题目。

(105)今有田广一步半,求田一亩,问纵几何?

以下至(115)题皆已知亩数和长求宽之类的题目,数学上皆低水平重复。

(116)今有积五万五千二百二十五步,问方几何?

[**注解**]题中的步指(5尺)^2,“方几何”是问此正方形边长是几,即面积的算术平方根是多少。此题显示我国秦汉时代已掌握了开平方的算法。

以下至(120)题皆与此题同类。

(121)今有积一千五百一十八步四分步之三,问圆周几何?

[**注解**]当时π取3,于是$3r^2=1518\frac{3}{4}$,由此开方求半径r,再用周长等于$6r$求得周长,这种圆的面积与周长的算法在秦汉时代已是家喻户晓。

(122)题与(121)题同类。

(123)今有积一百八十六万八百六十七尺,问为立方几何?

[注解]此题是求$\sqrt[3]{186867}$,表明我国秦汉时代已掌握求立方根的方法。

(124)题~(126)题与此题同类。

(127)今有积四千五百尺,问为立圆径几何?

[注解]"立圆"即球体,"径"指球的直径,当时《九章算术》用的公式是(d为直径)

$$V_{球}=\frac{9}{16}d^3$$

这个公式不正确。

(128)题与(127)题同类。

第五卷　商功

[注解]商功解决与工程有关的体积等问题。

(129)今有穿地积一万尺,问为坚、壤各几何?

[注解]"穿地"即挖土,"坚"指把挖出的土打夯后所成的所谓"坚土";"壤"指壤土,即肥沃土壤,按当时常识,挖出的土体积为4,则可变坚土3,可变壤土5。挖出1万尺^3,可做成坚土为1万尺^3 $\times\frac{3}{4}$,可做成壤土1万尺$^3\times\frac{5}{4}$。

(130)今有城,下广四丈,上广二丈,高五丈,袤一百二十六丈五尺,问积几何?

[注解]"城"指城墙,"下广"指城根基的厚度,"上广"指城墙顶部厚度,"袤"是长度。当时已采用正确体积公式

$$V=\frac{1}{2}(a_1+a_2)bh$$

其中a_1,a_2分别为上广和下广,h是高,b是袤。

(131)题~(135)题与(130)题同类。

(136)今有方堡壔,方一丈六尺,高一丈五尺,问积几何?

[注解]"方堡壔"即正四棱柱,当时已采用公式"底边自乘乘以高"来求体积。

(137)今有圆堡垧,周四丈八尺,高一丈一尺,问积几何?

[注解]"圆堡垧"即圆柱,当时采用体积公式

$$V=\frac{1}{12}L^2h$$

其中 L 是底面周长,h 是高,取 $\pi=3$。

(138)今有方亭,下方五丈,上方四丈,高五丈,问积几何?

[注解]"方亭"即正四棱台,当时中国数学家已知采用体积公式

$$V=\frac{1}{3}(ab+a^2+b^2)h$$

其中 a 是"上方",即上底边长,b 是"下方",h 是高。

(139)今有圆亭,下周三丈,上周二丈,高一丈,问积几何?

[注解]"圆亭"即圆台,当时中国数学家采用体积公式($\pi=3$)

$$V=\frac{1}{36}(L_1^2+L_2^2+L_1L_2)h$$

其中 L_1、L_2 分别是上下底圆周长,h 是高。

(140)今有方锥,下周二丈七尺,高二丈九尺,问积几何?

[注解]"方锥"即正四棱锥,当时采用体积公式

$$方锥体积=底面积\times 高\times\frac{1}{3}$$

(141)今有圆锥,下底三丈五尺,高五丈一尺,问积几何?

[注解]当时采用了体积公式:圆锥体积 = 底面周长自乘 × 高 × $\frac{1}{36}$,取 $\pi=3$,这个公式是成立的。

(142)今有堑堵,下广二丈,袤一十八丈六尺,高二丈五尺,问积几何?

[注解]"堑堵"是长方体被过一侧面对角线且与该侧面垂直的平面剖开后所得的那(两)个立体,见图 1.7,它的体积是长方体体积(长×宽×高)之半。

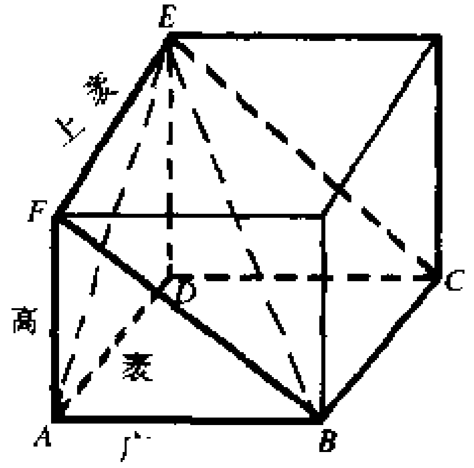


图 1.7

(143)今有阳马，广五尺，袤七尺，高八尺，问积几何？

[注解]"阳马"是古代建筑工匠专用名词，即有一棱与底面垂直的四棱锥，底面是长方形，当时已采用公式

$$\text{阳马体积}=\text{底面积}\times\text{高}\times\frac{1}{3}$$

图 1.7 中 $E-ABCD$ 是一个"阳马"。

(144)今有鳖臑，下广五尺，无袤；上袤四尺，无广；高七尺，问积几何？

[注解]"鳖臑"是由四个直角三角形围成的四面体，它是一个三棱锥，图 1.7 中 $E-ABF$ 是一个鳖臑，AB 是它的下广，AF 是高，EF 是上袤。

$$\text{阳马体积}=\frac{1}{6}(\text{上袤}\times\text{下广}\times\text{高})$$

(145)今有羡除，下广六尺，上广一丈，深三尺；末广八尺，无深；袤七尺，问积几何？

[注解]"羡"音 yàn，是古时的墓道；"除"指墓道里的台阶，"羡除"形如图 1.8 所示，是一个楔形物，侧面 $ABCD$ 与 $ABEF$ 垂直，AB 称为"上广"，CD 称为"下广"，$ABCD$ 是梯形，EF 是"末广"，梯形 $ABCD$ 的高即"羡除"的"深"，$ABEF$ 也是梯形，$ABEF$ 的高是"羡除"的"袤"。羡除的体积为

$$V = \frac{1}{6}(a_1 + a_2 + a_3)bh \qquad (1.4)$$

式中 a_1, a_2, a_3, b, h 分别为上广、下广、末广、袤和深。

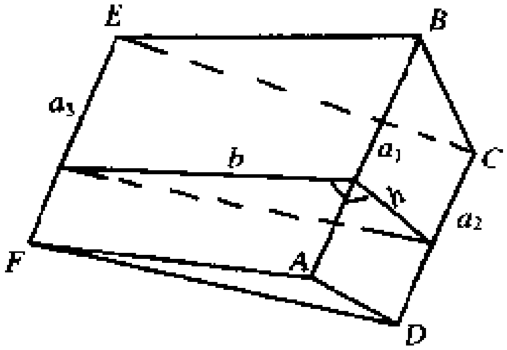


图 1.8

事实上，若上广、下广与末广相等，则羡除就变成了堑堵，这时公式(1.4)成立。不然，用垂直于下广的平面把它切分成若干堑堵、鳖臑、阳马等基本部分，易证公式(1.4)仍成立。

在我国古代数学家眼里，堑堵、阳马和鳖臑是最基本的多面体，是组合成各种多面体的“细胞”，而这 3 种基本多面体的体积有公式可用。若能把给定的多面体 V 切分成若干基本多面体，则 V 的体积可以求得。这种方法即著名的“出入相补原理”或称“割补原理”，为刘徽首创。

18 世纪 ~ 19 世纪最伟大的数学家高斯(Gauss，1777—1855，德)提出著名的“高斯多面体猜想：一般多面体体积的求得不可能不进行无穷次切割。”这一猜想被希尔伯特(Hilbert，1861—1943，德)列入著名的“二十三问题”之一(Hilbert 第三问题)，后被证明成立。希尔伯特的学生德恩(M. Dehn，1878—1952)证明：“存在两个等底等高四面体，它们不可能分解为有限个小四面体，使两组四面体对应等积。”

刘徽也遇到过有限次切割解决不了问题的情形，可惜没有提炼出类似于 Hilbert 第三问题的理论。

(146)今有刍甍，下广三丈，袤四丈；上袤二丈，无广；高一丈。问积几何？

[注解]"刍"即草,"甍"是屋脊,刍甍指状似瓦房的草垛,是一种下底为长方形的楔形物,见图1.9,$EF \parallel AB$,AD 为下广,AB 为袤,EF 为上袤,高指 EF 到平面 $ABCD$ 的距离,过 F 作 $ABCD$ 的垂线,垂足为 G,则 FG 是高。设 $FG=b$。

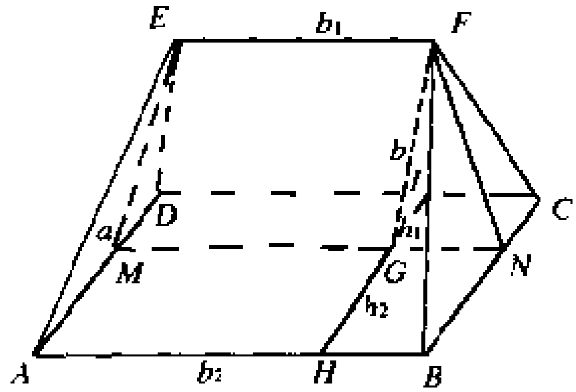


图1.9

在图1.9中,下广 $AD=a$,下袤 $AB=b_2$,上袤 $EF=b_1$,高 $FG=h$。过 G 与 EF 做平面,则此平面把刍甍切成两个羡除,与 $ABCD$ 交于线段 MN。过 G 作 $HI \parallel BC$,于是

刍甍 =(羡除 $EF-MNCD$)+(羡除 $EF-ABNM$)=

$$\frac{1}{6}(b_1+b_2+b_2)h_1b+\frac{1}{6}(b_1+b_2+b_2)h_2b=$$

$$\frac{1}{6}(b_1+2b_2)ab$$

这里妙用了刘徽的"割补原理"。

(147)今有刍童,上广二丈,袤三丈;下广三丈,袤四丈;高三丈,问积几何?

[注解]刍童是上下底为长方形的一个四棱台,上底有一条边平行于下底的一条边,如图1.10所示。

把此刍童切成两个刍甍 $EF-ABCD$ 与 $CD-EFGH$,见图1.10。图中,a 为上广,b 为上袤,c 为下广,d 为下袤,h 为高,于是刍童体积为

V(刍童)=(刍甍 $EF-ABCD$)+(刍甍 $CD-EFGH$)=

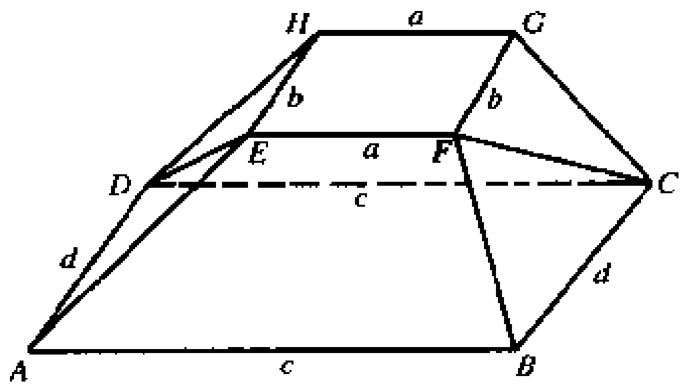


图 1.10

$$\frac{h}{6}[(a+2c)d+(c+2a)b]$$

(148)今有曲池,上中周二丈,外周四丈,广一丈;下中周一丈四尺,外周二丈四尺,广五尺;深一丈,问积几何?

[注解]“曲池”如图 1.11 所示,上底 $ABCD$ 中,$\overset{\frown}{AB}$与$\overset{\frown}{CD}$是同心圆(同一个圆心角)对的两段弧,下底 $A'B'C'D'$ 亦然,“深”指上下

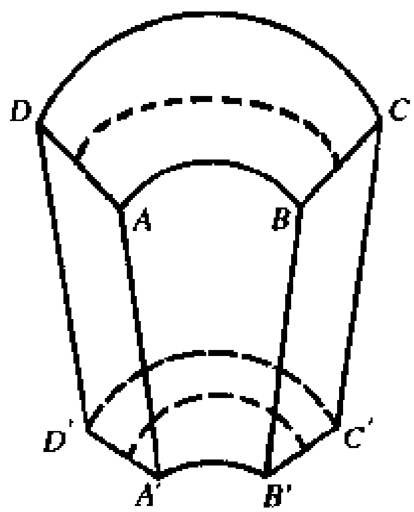


图 1.11

底的距离,上底的面积

$$S_{上}=\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\theta-\frac{1}{2}\theta r^2=$$

$$\frac{1}{2}[(r^2+2\Delta r\cdot r+\Delta r^2)\theta-\theta r^2]=$$

$$\left(\Delta r\cdot r+\frac{\Delta r^2}{2}\right)\theta=$$

$$\Delta r\left(\frac{2r+\Delta r}{2}\right)\theta=$$

$$\frac{1}{2}(\widehat{DC}+\widehat{AB})BC$$

$$S_{下}=\frac{1}{2}(\widehat{D'C'}+\widehat{A'B'})B'C'$$

于是上底与长宽分别为 BC 与$\frac{1}{2}(\widehat{DC}+\widehat{AB})$的长方形等积，下底亦然，进而把“曲池”化成一个刍童。如图 1.12 所示。

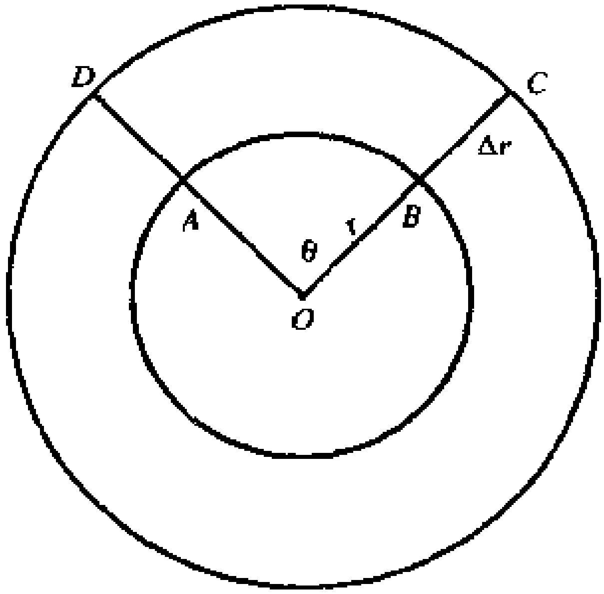


图 1.12

(149)今有盘池，上广六丈，袤八丈；下广四丈，袤六丈；深二丈，问积几何？

[注解]“盘池”即刍童状水池，不过上底大下底小而已。

(150)今有冥谷，上广二丈，袤七丈；下广八尺，袤四丈，深六丈五尺，问积几何？

[注解]“冥谷”即墓穴，形状与盘池同。

(151)今有委粟平地，下周一十二丈，高二丈，问积及粟几何？

[注解]“委粟平地”，在平地上堆一个圆锥形谷粒堆。其体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

当时用 $\pi=3$，故 $V=r^2h$，又圆周 $=2\pi r=6r$，$r=\frac{1}{6}$周，于是

$$V=\frac{1}{36}(\text{下周})^2\times\text{高}$$

(152)今有委菽依垣，下周三丈，高七尺，问积及菽各几何？

[注解]“委菽依垣”即靠墙堆放菽粮成一半圆锥。

(153)今有委米依垣内角，下周八尺，高五尺，问积及米几何？

[注解]“委米依垣内角”即把米在墙角处堆成$\frac{1}{4}$个圆锥形。

(154)今有穿地，袤一丈六尺，深一丈，上广六尺，为垣积五百七十六尺，问穿地下广几何？

[注解]“穿地”即挖土，“为垣”即用土打夯成墙。

设下广为 x，则挖出的土方为

$$\frac{1}{2}(\text{上广}+x)\times\text{深}\times\text{袤}=576\times\frac{4}{3}$$

(挖出的土为 4 尺^3，则打夯后得 3 尺^3。)

(155)今有仓，广三丈，袤四丈五尺，容粟一万斛，问高几何？

[注解]此仓是长方体。

(156)今有圆囷，高一丈三尺三寸少半寸，容米二千斛，问周几何？

[注解]“圆囷”，圆柱形粮仓。

第六卷 均输

[注解]均输讲的是平均地处理劳务费用等问题。

(157)今有均输粟，甲县一万户，行道八日；乙县九千五百户，行道十日；丙县一万二千三百五十户，行道十三日；丁县一万二千二百户，行道二十日；各到输所。凡四县赋，当输二十五万斛，用车

一万乘，欲以道里远近，户数多少衰出之，问粟车各几何？

[注解]"均输粟"指向各县平均摊派征收粮食与徭役。出车的辆数与其户数 h 成正比，而与运输所需天数 t 成反比，于是

甲出车数:乙出车数:丙出车数:丁出车数=

$$\frac{h_{甲}}{t_{甲}}:\frac{h_{乙}}{t_{乙}}:\frac{h_{丙}}{t_{丙}}:\frac{h_{丁}}{t_{丁}}$$

设 m 是用车总数(一万辆)，记

$$k_{甲}=\frac{\frac{h_{甲}}{t_{甲}}}{\frac{h_{甲}}{t_{甲}}+\frac{h_{乙}}{t_{乙}}+\frac{h_{丙}}{t_{丙}}+\frac{h_{丁}}{t_{丁}}}$$

则甲县出车 $k_{甲}m$ 辆，乙县出车 $k_{乙}m$ 辆，丙县出车 $k_{丙}m$，丁县出车 $k_{丁}m$。

又每车载粟 25 斛，用 25 去乘各县出车辆数，即得各县运送的粮食数。

(158)今有均输卒：甲县一千二百人，薄塞；乙县一千五百五十人，行道一日；丙县一千二百八十人，行道二日；丁县九百九十人，行道三日；戊县一千七百五十人，行道五日。凡五县赋，输卒一月，一千二百人，欲以远近、户率多少衰出之，问县各几何？

[注解]"薄塞"即接近边塞，不需多少时日即可到达。

各县调出的兵役人数与该县所有兵卒人数 m_i 成正比，与到达边塞的时间成反比，于是 $1200k_i$ 是第 i 县的赴边疆兵役人数，其中

$$k_i=\frac{\frac{m_i}{30+t_i}}{\sum_{i=1}^{5}\frac{m_i}{30+t_i}}$$

其中 t_i 是行至边塞所需天数，30 指"输卒"一个月(30 日)。

(159)今有均赋粟：甲县二万五百二十户，粟一斛二十钱，自输其县；乙县一万二千三百一十二户，粟一斛一十钱，至输所二百里；丙县七千一百八十二户，粟一斛一十二钱，至输所一百五十里；丁

县一万三千三百三十八户,粟一斛一十七钱,至输所二百五十里;戊县五千一百三十户,粟一斛一十三钱,至输所一百五十里。凡五县赋,输粟一万斛,一车载二十五斛,与僦一里一钱,欲以县户输粟,令费劳等,问县为粟几何?

[注解]"与僦"即付给运费(每里一钱),要求根据各县户数来纳粮("以县户输粟"),而且使劳务费要均等。

设 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 分别为5县纳粮数,每车载25斛,则各县出车辆数分别为$\frac{1}{25}x_i$;$i=1,2,\cdots,5$。各县运费为 $a_i\cdot\frac{x_i}{25}$,其中 a_i 是第 i 县所行里数;各县纳粮金额为 b_ix_i,b_i 是第 i 县的粮价。各县费用为 $a_i\frac{x_i}{25}+b_ix_i$,$i=1,2,\cdots,5$,每户负担为$\frac{1}{c_i}\left(a_i\frac{x_i}{25}+b_ix_i\right)$,$c_i$ 为第 i 县户数。于是得方程组

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10000$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{c_1}\left(a_1\frac{x_1}{25}+b_1x_1\right)=&\frac{1}{c_2}\left(a_2\frac{x_2}{25}+b_2x_2\right)=\\&\frac{1}{c_3}\left(a_3\frac{x_3}{25}+b_3x_3\right)=\\&\frac{1}{c_4}\left(a_4\frac{x_4}{25}+b_4x_4\right)=\\&\frac{1}{c_5}\left(a_5\frac{x_5}{25}+b_5x_5\right)\end{aligned}$$

(160)题与(159)题同类。

(161)今有粟七斗,三人分舂之;一人为粝米,一人为粺米,一人为糳米,令米数等,问粟为米各几何?

[注解]问的是每人用的粟和舂成的米各多少。设每人得米为 x 斗,分别用粟 x_1,x_2,x_3,则

$$\frac{x_1}{x}=\frac{50}{30},\frac{x_2}{x}=\frac{50}{27},\frac{x_3}{x}=\frac{50}{24}$$

于是

$$\frac{1}{x}(x_1+x_2+x_3)=50\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{27}+\frac{1}{24}\right)$$

$$x=7\div\left[50\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{27}+\frac{1}{24}\right)\right]=1\frac{151}{605}$$

$$x_1=x\cdot\frac{50}{30},x_2=x\cdot\frac{50}{27},x_3=x\cdot\frac{50}{24}$$

(162)今有人当禀粟二斛，仓无粟，欲以米一菽二，以当所禀，问各几何？

[注解]“禀”即赐予。米一菽二指一份米二份菽，米指粝米。设米 x 斛，则菽 $2x$ 斛，折合成粟则有

$$x\cdot\frac{50}{30}+2x\cdot\frac{50}{45}=2$$

(163)今有取佣负盐二斛，行一百里，与钱四十。今负盐一斛七斗三升少半升，行八十里，问与钱几何？

[注解]“少半升”指$\frac{1}{3}$升。设与钱(即付工钱)x，则

$$\frac{40}{2\times100}=\frac{x}{\left(1\frac{7}{10}+\frac{3\frac{1}{3}}{100}\right)\times80}$$

(164)今有负笼重一石一十七斤，行七十六步，五十返；今负笼重一石，行百步，问返几何？

[注解]“五十返”指 50 次往返。1 石 = 120 斤。

$$\text{结果}=(120+17)\times76\times50\div(120\times100)$$

(165)今有程传委输，空车日行七十里，重车日行五十里；今载太仓粟输上林，五日三返，问太仓去上林几何？

[注解]设太仓距上林 x 里，3 次重车，3 次空车，重车用时$\frac{3x}{50}$，空车用时$\frac{3x}{70}$，于是

$$\frac{3x}{50}+\frac{3x}{70}=5$$

(166)今有络丝，一斤为练丝十二两；练丝一斤，为青丝一斤十二铢；今有青丝一斤，问本络丝几何？

[注解]1 斤 = 16 两，1 两 = 24 铢。

(167)今有恶粟二十斗,舂之,得粝米九斗;今欲求粺米十斗,问恶粟几何?

[注解]"恶粟"即劣质粟。已知粝米 30 相当于粺米 27。

(168)今有善行者行一百步,不善行者行六十步;今不善行者先行一百步,善行者追之,问几何步追及?

[注解]设善行者行 x 步追及,则

$$\frac{x}{100}=\frac{x-100}{60}$$

(169)今有不善行者先行一十里,善行者追之一百里,先至不善行者二十里,问善行者几何里及之?

[注解]设善行者行 x 里追及不善行者,又令 v_1,v_2 分别为善行者与不善行者的速度,则

$$\begin{cases}\dfrac{100}{v_1}=\dfrac{100-10-20}{v_2} & (1.5)\\[2ex] \dfrac{x}{v_1}=\dfrac{x-10}{v_2} & (1.6)\end{cases}$$

式(1.6)÷式(1.5)得

$$\frac{x}{100}=\frac{x-10}{70}$$

(170)今有兔先走一百步,犬追之二百五十步,不及三十步而止,问犬不止,复行几何步及之?

[注解]设犬速为 v_1,兔速为 v_2,犬复行 x 步即可追及兔子,则

$$\begin{cases}\dfrac{250+x}{v_1}=\dfrac{250+x-100}{v_2} & (1.7)\\[2ex] \dfrac{250}{v_1}=\dfrac{250-100+30}{v_2} & (1.8)\end{cases}$$

式(1.7)÷式(1.8),再解出 x。

(171)今有人持金十二斤出关,关税之,十分而取一,今关取金二斤,偿钱五千,问金一斤值钱几何?

[注解]"偿钱"指"找零"。

设一斤金子值钱 x,则此出关人纳税为

$$2x - 5000 = 12x \times \frac{1}{10}$$

(172)今有客马日行三百里,客去忘持衣,日已三分之一,主人乃觉,持衣追及,与之而还,至家,视日四分之三,问主人马不停,日行几何?

[**注解**]设主人马速为 v,则

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)v=\left[\frac{1}{3}+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2}\right]300$$

(173)今有金棰,长五尺,斩本一尺,重四斤,斩末一尺,重三斤,问次一尺各重几何?

[**注解**]"次一尺"指依次一尺一尺地。"本"指下端,"末"指上端,下粗上细。

从末至本等分成5段,分别为2斤,x_1 斤,x_2 斤,x_3 斤和4斤,成等差级数,故

$$x_2=\frac{1}{2}(2+4)=3(\text{斤})$$

$$x_1=\frac{1}{2}(2+x_2)=2\frac{1}{2}(\text{斤})$$

$$x_3=\frac{x_2+4}{2}=\frac{3+4}{2}=3\frac{1}{2}(\text{斤})$$

(174)今有五人分五钱,令上二人与下三人等,问各得几何?

[**注解**]当时社会把人分成等级,分配按等级依等差级数进行,设第三等人得 x,则

$$(x+2d)+(x+d)+x+(x-d)+(x-2d)=5 \qquad (1.9)$$

解得 $x=1$。把 x 代入式(1.9)解得 d。

$$x+2d,x+d,x,x-d,x-2d$$

依次是5人所得。

(175)今有竹九节,下三节容四升,上四节容三升,问中间二节欲均容,各多少?

[**注解**]"均容"指各节的容积均匀地变化,此题如同(174)题按等差级数计算。

(176)今有凫起南海，七日至北海；雁起北海，九日至南海，今凫雁俱起，何日相逢？

[**注解**]设凫速 v_1，雁速 v_2，则

$$7v_1 = 9v_2, \qquad v_2 = \frac{7}{9}v_1$$

$$\frac{7v_1}{v_1 + v_2} = \frac{7v_1}{v_1 + \frac{7}{9}v_1} = 3\frac{15}{16}(\text{日})$$

可得 $3\frac{15}{16}$日相逢。

(177)今有甲发长安，五日至齐；乙发齐，七日至长安。今乙发已先二日，甲乃发长安，问几何日相逢？

[**注解**]设甲速 v_1，乙速 v_2，则

$$5v_1 = 7v_2, v_1 = \frac{7}{5}v_2$$

$$\frac{5v_2}{v_1 + v_2} = \frac{5v_2}{\frac{7}{5}v_2 + v_2} = 2\frac{1}{12}(\text{日})$$

即甲出发后 $2\frac{1}{12}$日相逢。

(178)今有一人一日为牡瓦三十八枚，一人一日为牝瓦七十六枚，今令一人一日作瓦牝牡相半，问成瓦几何？

[**注解**]设此人作一日制成牝、牡瓦各 x 枚，于是

$$\frac{x}{76} + \frac{x}{38} = 1$$

(179)今有一人一日矫矢五十，一人一日羽矢三十，一人一日筈矢十五，今令一人一日自矫、羽、筈，问成矢几何？

[**注解**]"矫矢"指矫直箭，"羽矢"即装箭翎，"筈矢"指装箭筈。

设一人一日成矢 x 只，则

$$x\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{30} + \frac{1}{15}\right) = 1$$

(180)今有俱田，初假之岁三亩一钱，明年四亩一钱，后年五亩一钱；凡三岁，得一百，问田几何？

[注解]“假田”即出租土地。设出租田 x 亩,则

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}=100$$

(181)题与(179)题同类。

(182)今有池,五渠注之;其一渠开之,少半日一满;次,一日一满;次,二日半一满;次,五日一满;今皆决之,问几何日满池?

[注解]“少半日”即$\frac{1}{3}$天。设五渠皆放水入池,x 日注满全池,则

$$\frac{1}{\frac{1}{3}}x+x+\frac{1}{2\frac{1}{2}}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}x=1$$

(183)今有人持米出三关,外关三而取一,中关五而取一,内关七而取一,余米五斗,问本持米几何?

[注解]设本来携带的米为 x 斗,则

过第一关(外关)后剩米$\left(1-\frac{1}{3}\right)x$;

过第二关(中关)后剩米$\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)x$;

过第三关(内关)后剩米$\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)x=5$。

(184)今有人持金出五关,前关二而税一,次关三而税一,次关四而税一,次关五而税一,次关六而税一,并五关所税,适重一斤,问本持金几何?

[注解]设本来持金 x 斤,则

第一关:收税 $\frac{1}{2}x$, 余金$\frac{1}{2}x$;

第二关:收税 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}x=\frac{1}{6}x$, 余金$\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x=\frac{1}{3}x$;

第三关:收税 $\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}x=\frac{1}{12}x$, 余金$\frac{1}{3}x-\frac{1}{12}x=\frac{1}{4}x$;

第四关:收税 $\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}x=\frac{1}{20}x$, 余金$\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{20}\right)x=\frac{1}{5}x$;

第五关:收税 $\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}x=\frac{1}{30}x$, 余金$\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{30}\right)x=\frac{1}{6}x$。

于是

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}\right)x=1$$

第七卷　盈不足

[**注解**]即今日小学算术中的“盈亏问题”。

(185)今有共买物,人出八,盈三;人出七,不足四,问人数、物价各几何?

[**注解**]设人 x 位,物价 y 元,则

$$\begin{cases}8x=y+3\\7x=y-4\end{cases}$$

(186)题、(187)题与(185)题同类。

(188)今有共买牛,七家共出一百九十,不足三百三十,九家共出二百七十,盈三十,问家数、牛价各几何?

[**注解**]设家数为 x 户,牛价为 y,则

$$\begin{cases}\dfrac{190}{7}x=y-330\\\dfrac{270}{9}x=y+30\end{cases}$$

解得 $x=126,y=3750$。

(189)题~(192)题与(188)题同类。

(193)今有米在十斗桶中,不知其数,满中添粟,而舂之,得米七斗,问故米几何?

[**注解**]“满中添粟”,把桶用粟添满;“故米”指原来桶里的米。

设故米为 x 斗,则添加的粟为 $10-x$ 斗,按粟 50 粝米 30 的比例,$10-x$ 斗粟能舂成的米为

$$(10-x)\frac{30}{50}\text{斗}$$

于是

$$(10-x)\frac{3}{5}+x=7$$

(194)今有垣,高九尺,瓜生其上,蔓日长七寸,瓠生其下,蔓日

长一尺，问几何日相逢？瓜、瓠各长几何？

[注解]"垣"即墙，"瓜生其上"指一棵南瓜苗长在墙头，"瓠生其下"指一棵葫芦苗长在墙根下南瓜苗正下方。设 x 日两种瓜蔓相逢，则（以寸为单位）

$$(7+10)x=90$$

(195)今有蒲生一日，长三尺；莞生一日，长一尺，蒲生日自半，莞生日自倍，问几何日而长等。

[注解]莞(guān)，水葱。

设 x 日蒲莞等长，按等比级数之和计算，

$$\frac{3\left(1-\frac{1}{2}^{x}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1(1-2^{x})}{1-2}$$

得 $2^{x}=6, x=\log_{2}6=1+\log_{2}3$。

当时世界上尚无人知道 $\log_{2}3$ 是何物！可见此题当时是无人能得出其精确解的。

对数是英国数学家纳皮尔(J.Napier,1550—1617)于 1614 年创立的。1624 年，开普勒引入符号 $\log_{a}N$。17 世纪中叶，由穆尼阁把对数 $\log_{a}N$ 介绍到中国。由于对数能节省计算时间，被世人誉为"使科学家延长寿命的重大数学成就。"

(196)今有垣厚五尺，两鼠对穿，大鼠日一尺，小鼠亦日一尺；大鼠日自倍，小鼠日自半，问几何日相逢？各穿几何？

[注解]此题与(195)题同类，同水平重复。

(197)今有醇酒一斗，值钱五十；行酒一斗，值钱一十。今将钱三十，得酒二斗，问醇、行酒各得几何？

[注解]设醇酒 x 斗，行酒 y 斗，则

$$\begin{cases}x+y=2\\50x+10y=30\end{cases}$$

(198)今有大器五，小器一，容三斛；大器一，小器五，容二斛，问大小器各容几何？

[注解]设大器容 x，小器容 y，则

$$\begin{cases}5x+y=3\\x+5y=2\end{cases}$$

(199)今有漆三得油四，油四和漆五。今有漆三斗，欲令分以易油，还自和余漆，问出漆、得油、和漆各几何？

[注解]“漆三得油四”是指3份漆可换得4份油。“油四和漆五”是说4份油可以调和5份漆。

设从漆中拿出 x 斗去换油，还剩 $3-x$ 斗漆；x 斗漆换得的油为 $\frac{4}{3}x$ 斗。于是

$$\frac{3-x}{\frac{4}{3}x}=\frac{5}{4}$$

(200)今有玉方一寸，重七两；石方一寸，重六两。今有石立方三寸，中有玉，并重十一斤，问玉、石各重几何？

[注解]设3立方寸中有玉 x 立方寸，石 y 立方寸，则

$$\begin{cases}x+y=27\\7x+6y=11\times16\end{cases}$$

题文中“一寸”指(1寸)^3，“立方三寸”指(3寸)^3。

(201)今有善田一亩，价三百；恶田七亩，价五百，今并买一顷，价钱一万，问善、恶田各几何？

[注解]设善田 x 亩，恶田 y 亩，则

$$\begin{cases}x+y=100\\300x+\frac{500}{7}y=10000\end{cases}$$

(202)今有黄金九枚，白银一十一枚，称之重适等；交易其一，金轻十三两，问金、银一枚各重几何？

[注解]设金一枚 x 两，银一枚 y 两，则

$$\begin{cases}9x=11y\\8x+y+13=10y+x\end{cases}$$

(203)今有良马与驽马发长安至齐，齐去长安三千里。良马初日行一百九十三里，日增一十三里，驽马初日行九十七里，日减半

里。良马先至齐，复还迎驽马。问几何日相逢及各行几何？

[注解]设 x 日两马相逢，则良马行程为

$$\frac{1}{2}\{193+[193+(x-1)13]\}x$$

驽马行程为

$$\frac{1}{2}\left\{97+\left[97-(x-1)\frac{1}{2}\right]\right\}x$$

于是

$$\frac{1}{2}\{193+[193+(x-1)13]\}x+\frac{1}{2}\{97+[97-(x-1)\frac{1}{2}]\}x=$$

$$2\times 3000$$

这是以 x 为未知数的一元二次方程。

《九章算术》的"答曰"给出的是近似值。

(204)今有人持钱之蜀，贾，利十三。初返，归一万四千；次返，归一万三千；次返，归一万二千；次返，归一万一千；后返，归一万。凡五返归钱，本利俱尽。问本持钱及利各几何？

[注解]此题说某人拿钱去四川经商(贾)，利润率$\frac{3}{10}$。记 A_i，B_i，C_i 分别为第 i 次的投资、给家留钱和得利，$i=1,2,3,4,5$，则

$A_1=x, B_1=14000, C_1=0.3x$

$A_2=A_1+C_1-B_1=1.3x-14000, B_2=13000, C_2=0.3A_2$

$A_3=1.3A_2-B_2, B_3=12000, C_3=0.3A_3$

$A_4=1.3A_3-B_3, B_4=11000, C_4=0.3A_4$

$A_5=1.3A_4-B_4, B_5=10000, C_5=0.3A_5$

由题意

$$1.3A_5=10000$$

A_5 中含 x，可解得 x。

共获利 $0.3(A_1+A_2+A_3+A_4+A_5)$，A_i 中含 x，x 已在上面求得。

第八卷　方程

[注解]方程是含未知数的等式，古代中国数学家称未知数为"天

元”,列方程和解方程的技术称为“天元术”;且有名言曰:“代数即天元”。此言现在听起来似有偏颇,但基本切中要害。不仅代数方程如此,现代的微分方程若求数值解,亦是天元术,可见天元术之重要。

(205)今有上禾三秉,中禾二秉,下禾一秉,实三十九斗;上禾二秉,中禾三秉,下禾一秉,实三十四斗;上禾一秉,中禾二秉,下禾三秉,实二十六斗。问上、中、下禾实一秉各几何?

[注解]“秉”即捆。“实”指稻捆脱粒后所得的稻谷。“实一秉”指一捆能收的粮食。

设每捆上、中、下禾分别得实 x 斗, y 斗和 z 斗,则

$$\begin{cases}3x+2y+z=39\\2x+3y+z=34\\x+2y+3z=26\end{cases}$$

在中国,刘徽首先用消元法解线性方程组。

(206)今有上禾七秉,损实一斗,益之下禾二秉,而实一十斗。下禾八秉,益实一斗,与上禾二秉,而实一十斗。问上、下禾实一秉各几何?

[注解]“损实一斗”指米损失了一斗。“益之”是给它添上;“益实”指添加稻米。

设上禾每捆可得粮 x 斗,下禾每捆可得粮 y 斗,则

$$\begin{cases}7x-1+2y=10\\2x+8y+1=10\end{cases}$$

(207)今有上禾二秉,中禾三秉,下禾四秉,实皆不满斗。上取中,中取下,下取上各一秉,而实满斗,问上、中、下禾实一秉各几何?

[注解]“不满斗”即不满一斗。设 x,y,z 分别是上、中、下禾每捆可得粮食的斗数,则

$$\begin{cases}2x+y=1\\3y+z=1\\4z+x=1\end{cases}$$

(208)今有上禾五秉,损实一斗一升,当下禾七秉。上禾七秉,损实二斗五升,当下禾五秉,问上、下禾实一秉各几何?

[注解]设每捆上、下禾分别可得粮食 x 斗与 y 斗,则

$$\begin{cases}5x-1.1=7y\\7x-2.5=5y\end{cases}$$

(209)题、(210)题与(208)题同类。

(211)今有牛五，羊二，值金十两；牛二，羊五，值金八两，问牛、羊各值金几何？

[**注解**]设牛、羊值金分别为 x 两与 y 两，则

$$\begin{cases}5x+2y=10\\2x+5y=8\end{cases}$$

(212)今有卖牛二，羊五，以买十三豕，有余钱一千；卖牛三，豕三，以买九羊，钱适足；卖羊六，豕八，以买五牛，钱不足六百；问牛、羊、豕价各几何？

[**注解**]设牛、羊、豕价分别为 x,y,z，则

$$\begin{cases}2x+5y=13z+1000\\3x+3z=9y\\6y+8z=5x-600\end{cases}$$

(213)今有五雀，六燕，集称之衡，雀俱重，燕俱轻，一雀一燕交而处，衡适平。并雀、燕重一斤。问燕、雀一枚各重几何？

[**注解**]"集称之衡"，在衡器(秤)上把五雀一起称量，把六燕一起称量。"交而处"，在衡器(似天平)两端交换一雀一燕；"并燕、雀"，即一只雀加上一只燕。

设每只燕重 x 斤，每只雀重 y 斤，则

$$\begin{cases}5x+y=4y+x\\x+y=1\end{cases}$$

(214)今有甲乙二人持钱，不知其数。甲得乙半，而钱五十，乙得甲太半，而亦钱五十。问甲乙持钱各几何？

[**注解**]"太半"即$\frac{2}{3}$。设甲有钱 x，乙有钱 y，则

$$\begin{cases}x+\dfrac{y}{2}=50\\y+\dfrac{2}{3}x=50\end{cases}$$

(215)今有二马一牛，价过一万，如半马之价；一马二牛，价不满一万，如半牛之价，问牛、马价各几何？

[注解]设牛价 x，马价 y。

“价过一万，如半马之价”，指价钱比一万多出的部分等于马价的一半。

$$\begin{cases} x+2y=10000+\frac{1}{2}y \\ 2x+y=10000-\frac{1}{2}x \end{cases}$$

(216)今有武马一匹，中马二匹，下马三匹，皆载四十石至坂，皆不能上。武马借中马一匹，中马借下马一匹，下马借武马一匹，乃皆上，问武、中、下马一匹各力引几何？

[注解]“坂”即坡路；“力引”即引力。

设武马、中马、下马力引分别为 x,y,z，则

$$\begin{cases} x+y=40 \\ 2y+z=40 \\ 3z+x=40 \end{cases}$$

(217)今有五家共井，甲二绠不足，如乙一绠；乙三绠不足，如丙一绠；丙四绠不足，如丁一绠；丁五绠不足，如戊一绠；戊六绠不足，如甲一绠，为各得所不足一绠，皆逮。问进深、绠长各几何？

[注解]“绠”，井绳。“逮”指恰达到水面，“甲二绠不足，如乙一绠”，指甲两根井绳不够，短缺的部分与乙的一条井绳一样长。

设甲、乙、丙、丁、戊的绠长分别为 x,y,z,u,v，井深 h，则

$$\begin{cases} 2x+y=h \\ 3y+z=h \\ 4z+u=h \\ 5u+v=h \\ 6v+x=h \end{cases}$$

这是一个不定方程组，说明我古代数学家已研究不定方程组这种现代线性代数问题了。

方程组的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

其增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

经过行的初等变换得

$$\begin{pmatrix} 721 & 0 & 0 & 0 & 0 & 265 \\ 0 & 721 & 0 & 0 & 0 & 191 \\ 0 & 0 & 721 & 0 & 0 & 148 \\ 0 & 0 & 0 & 721 & 0 & 129 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 721 & 76 \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{cases} 721x = 265h \\ 721y = 191h \\ 721z = 148h \\ 721u = 129h \\ 721v = 76h \end{cases}$$

解得

$$\frac{x}{h} = \frac{265}{721}, \frac{y}{h} = \frac{191}{721}, \frac{z}{h} = \frac{148}{721}, \frac{u}{h} = \frac{129}{721}, \frac{v}{h} = \frac{76}{721}$$

井深 721，则甲之绠长 265，乙的长 191，丙长 148，丁长 129，戊长 76。这是最小正整数解。

(218)今有白禾二步，青禾三步，黄禾四步，黑禾五步，实各不

满斗。白取青、黄,青取黄、黑,黄取黑、白,黑取白、青,各一步,而实满斗。问白、青、黄、黑禾实一步,各几何?

[注解]"白取青、黄"的"取"字理解为添加。

设 x、y、z、u 分别为白、青、黄、黑禾一步可得的粮食数,则

$$\begin{cases}2x+y+z=1\\3y+z+u=1\\4z+u+x=1\\5u+x+y=1\end{cases}$$

(219)今有甲禾二秉,乙禾三秉,丙禾四秉,重皆过于石,甲二重如乙一,乙三重如丙一,丙四重如甲一,问甲、乙、丙禾一秉各重几何?

[注解]"重皆过于石,甲二重如乙一"是说二捆甲禾超过一石的重量与乙禾一捆的重量一样。

设甲、乙、丙禾每捆重分别为 x、y、z 石,则

$$\begin{cases}2x-1=y\\3y-1=z\\4z-1=x\end{cases}$$

(220)今有令一人,吏五人,从者一十人,食鸡一十;令一十人,吏一人,从者五人,食鸡八;令五人,吏一十人,从者一人,食鸡六。问令、吏、从者一人食鸡各几何?

[注解]设县长、干部和服务员分别吃鸡 x、y、z,则

$$\begin{cases}x+5y+11z=10\\10x+y+5z=8\\5x+10y+z=6\end{cases}$$

(221)题、(222)题与(220)题同类。

第九卷　勾股

(223)今有勾三尺,股四尺,问弦几何?

(224)题、(225)题与(223)题同类。

(226)今有圆材,径二尺五寸,欲为方板,令厚七寸,问广几何?

[注解]如图 1.13 所示,设广为 x 寸,则

$$x^2 + 7^2 = 25^2$$

此题显示，中国古代数学家在秦汉时代已知晓直径上的圆周角为直角、圆内接矩形的对角线过圆心等几何知识。

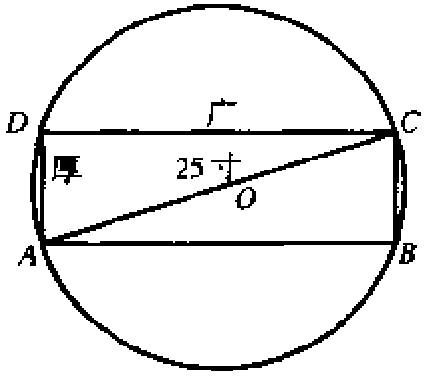


图 1.13

(227)今有木长二丈，围之三尺，葛生其下，缠木七周，上与木齐，问葛长几何？

[**注解**]缠 7 周，每周上升$\frac{20}{7}$尺，把圆柱面展开成一矩形，设葛按最短路径上缠，从 A 点至 B 点为一周，见图 1.14(a)和图 1.14(b)。

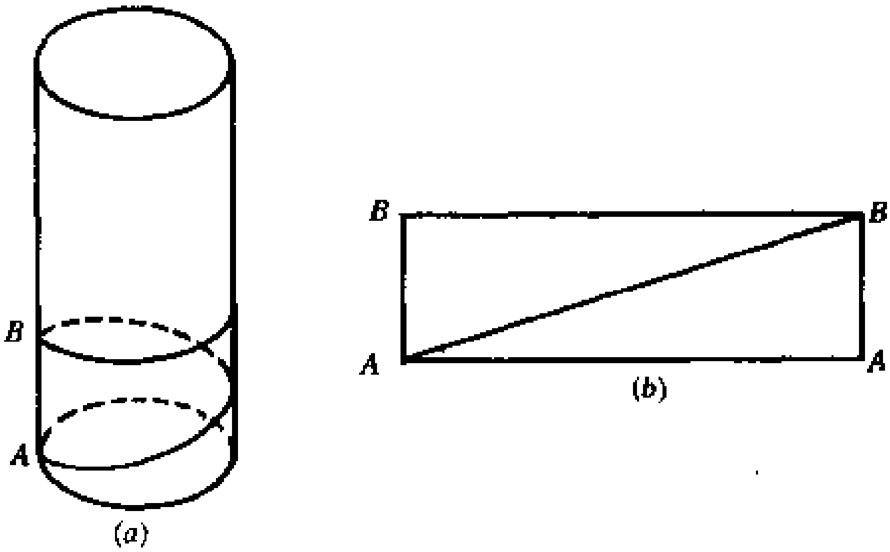


图 1.14

$AB = \frac{20}{7}$，由已知得

$$2\pi R = 3$$

取 $\pi=3$，$R=\frac{1}{2}$(尺)，于是 $AA=2\pi R=3$ 尺，由勾股定理得

$$AB=\sqrt{3^2+\left(\frac{20}{7}\right)^2}$$

葛长 $7AB$。

(228)今有池，方一丈，葭生其中央，出水一尺，引葭赴岸，适与岸齐，问水深、葭长各几何？

[**注解**]“方一丈”即边长一丈的正方形，“葭”，即芦苇。“引葭赴岸，适与岸齐”，是把芦苇的顶拉向岸，恰好接触岸的边缘。

设葭长 x 尺，则(见图 1.15)

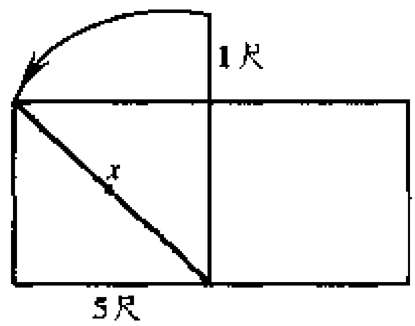


图 1.15

$$x^2=5^2+(x-1)^2$$

水深 $x-1$。

(229)今有立木，系索其末，委地三尺，引索却行，去木八尺，问索长几何？

[**注解**]“立木”，垂直埋在地上的木桩；“系索其末”，一条绳索绑在它的顶端；“委地三尺”，绳子落在地上的部分长 3 尺；“引索却行”，拉着绳子面对木桩后退，“去木八尺”，指绳子拉直且端点落地，端点距木桩八尺。设索长 x，则由勾股定理得

$$x^2-(x-3)^2=8^2$$

(230)今有垣，高一丈，倚木于垣，上与垣齐，引木却行一尺，其木至地，问木几何？

[**注解**]“其木至地”，木杆躺在地上。

设木长 x 尺，则(见图 1.16)

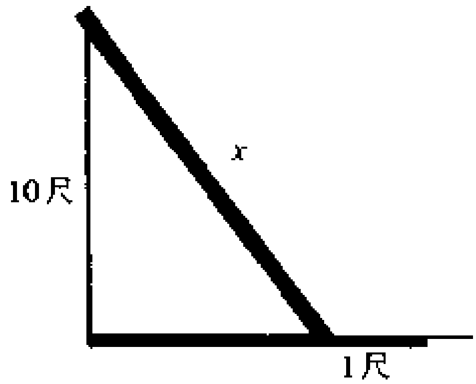


图 1.16

$$x^2 = 10^2 + (x-1)^2$$

(231)今有圆材，埋在壁中，不知大小；以锯锯之，深一寸，锯道长一尺，问径几何？

[注解]见图 1.17，设半径为 r 寸，则

$$r^2 = (r-1)^2 + 5^2$$

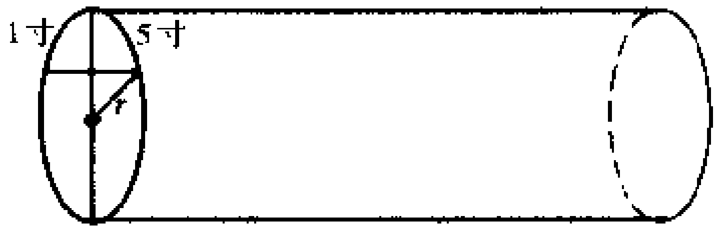


图 1.17

(232)今有开门，去阃一尺，不合二寸，问门广几何？

[注解]"阃"，门槛，见图 1.18。

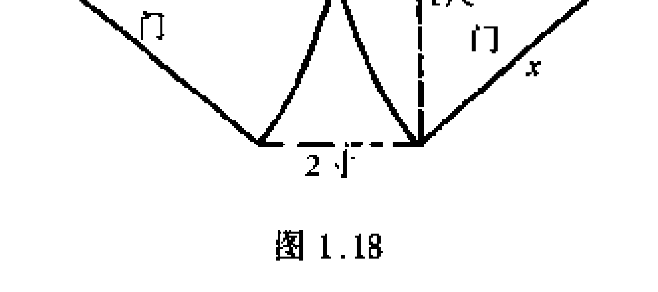


图 1.18

设每扇门宽 x 尺,则由勾股定理得

$$x^2 = 1^2 + (x - 0.1)^2$$

(233)今有户,高多于广六尺八寸,两隅相去适一丈,问户高、广各几何?

[注解]"户"即门。"两隅相去",即门的对角线之长。

设门宽 x 尺,则高为 $x + 6.8$,于是

$$10^2 = x^2 + (x + 6.8)^2$$

这是一个一元二次方程。

《九章算术》"术曰"中为解此方程,给出的公式是

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{c^2 - 2\left(\frac{b - a}{2}\right)^2}{2}} - \frac{b - a}{2} \\ b &= \sqrt{\frac{c^2 - 2\left(\frac{b - a}{2}\right)^2}{2}} + \frac{b - a}{2} \end{aligned} \tag{1.10}$$

刘徽在《九章算术注》中则给出公式

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2}\left[\sqrt{2c^2 - (b - a)^2} - (b - a)\right] \\ b = \dfrac{1}{2}\left[\sqrt{2c^2 - (b - a)^2} + (b - a)\right] \end{cases} \tag{1.11}$$

其中 a 为勾,b 为股,c 为弦。

容易验证,公式(1.10)与公式(1.11)皆成立。

此题中,已知 $b - a = 6.8$,$c = 10$,代入公式(1.10)或(1.11),可算出勾 a(即我们设的 x)。

为迎合这一具体题目(c 与 $b - a$ 已知),刘徽等古代数学家巧妙地构作出公式(1.10)与(1.11),真是鬼斧神工,他们给出了已知 c 与 $b - a$ 时求 a 与 b 的算法,等价于对二次方程

$$2x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 - \beta^2 = 0$$

给出了求根公式。

(234)今有户,不知高广,竿不知长短,横之,不出四尺,纵之,

不出二尺，斜之适出，问户高、广、斜各几何？

[注解]见图 1.19。

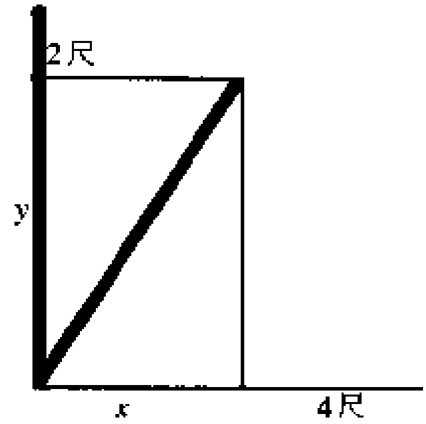


图 1.19

设门宽 x 尺，高 y 尺，则

$$\begin{cases}(x+4)^2=x^2+y^2\\(y+2)^2=x^2+y^2\end{cases}$$

(235)今有竹，高一丈，末折抵地，去本三尺，问折者高几何？

[注解]"末折抵地"，见图 1.20，设折点高 x 尺，则

$$(10-x)^2=x^2+3^2$$

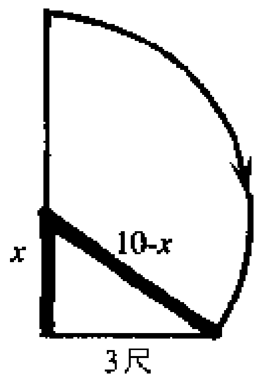


图 1.20

这是一个一元二次方程，《九章算术》中作出求解公式

$$b=\frac{1}{2}\left[(c+b)-\frac{a^2}{c+b}\right] \tag{1.12}$$

公式(1.12)中 b 即方程中的 x，$c+b=10$，$a=3$，所以用公式

(1.12)可以算出 $x=b$。

容易验证公式(1.12)是成立的,其中 a,b,c 分别是勾、股和弦。

我们反复看到,《九章算术》为解一个具体的一元二次方程,针对该方程的结构建立一个求解公式(例如题(233)中的公式(1.10)和公式(1.11),题(235)中的公式(1.12)),事实上,离给出一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0$$

的求根公式只差一层窗户纸没有捅破!

《九章算术》的成书年代(汉代)外国亦无一元二次方程的求根公式,我国数学家赵爽(公元3世纪)对方程

$$-x^2+kx=A$$

给出了求根公式

$$x=\frac{1}{2}\left[k-\sqrt{k^2-4A}\right]$$

但这仍不是一般意义下的求根公式,对于方程

$$ax^2+kx+c=0$$

的求根公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

是9世纪阿拉伯数学家花拉子米建立的。

花拉子米(Al-Khowarizmi,783—850),生于波斯的花拉子模,卒于巴格达。820年,花的名著《代数学》问世,此书中首创了一元二次方程的求根公式。

(236)今有二人同所立,甲行率七,乙行率三,乙东行,甲南行十步,而斜东北,与乙会,问甲乙行各几何?

[注解]"同所立",站在同一个地点。"行率"即速度。

设乙行 x 步,则耗时 $\frac{x}{3}$,在此时间内,甲的行程为 $7\times\frac{x}{3}$,于是(见图1.21)

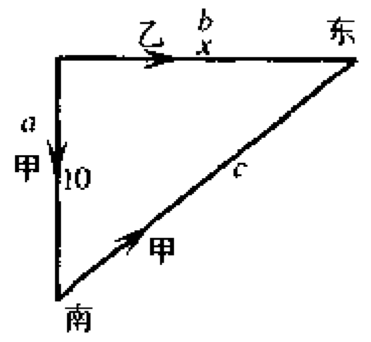


图 1.21

$$x^2+10^2=\left(\frac{7}{3}x-10\right)^2$$

《九章算术》刘徽注对(236)题解法另有高招：刘徽的解法用现代写法如下，设甲速为 m，乙速为 n，a，b，c 分别为勾股弦，则

$$\frac{a+c}{b}=\frac{m}{n}$$

由此得出

$$a:b:c=\frac{m^2-n^2}{2}:mn:\frac{m^2+n^2}{2} \qquad (1.13)$$

题中 $a=10$，$m=7$，$n=3$，代入上式可求得甲，乙行程。

公式(1.13)正是现代勾股数的公式，可惜我国古代数学家有"只言术不言证"的毛病，我们找不到历史证据证实秦汉时代中国数学家已知下面的重要命题：

设 m，n 是互素自然数，则

$$\left(\frac{m^2-n^2}{2},mn,\frac{m^2+n^2}{2}\right)$$

是勾股数组。

(237)今有勾五步，股一十二步，问勾中容方几何？

[注解]"勾中容方"指图 1.22 中正方形 $CDEF$ 的边长。设勾中容方为 x，由三角形相似理论

$$\frac{x}{BC}=\frac{AD}{AC}$$

今 $BC=5$，$AC=12$，$AD=12-x$，于是

$$\frac{x}{5}=\frac{12-x}{12}$$

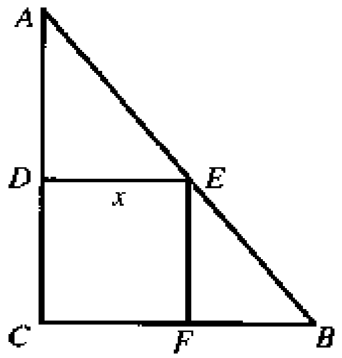


图 1.22

(238)今有勾八步,股一十五步,问勾中容圆径几何?

[注解]“勾中容圆”是直角三角形的内切圆。由面积计算可得(见图 1.23)

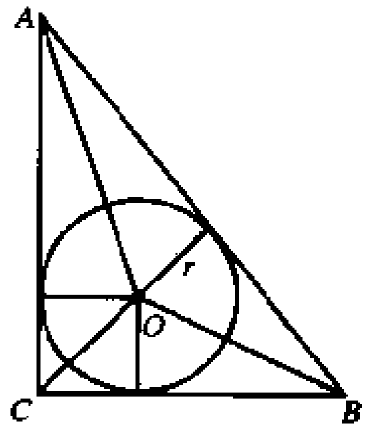


图 1.23

$$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ra+\frac{1}{2}rb+\frac{1}{2}rc$$

于是直径

$$2r=\frac{2ab}{a+b+c}$$

其中 $a=8, b=15, c=\sqrt{8^2+15^2}$。

(239)今有邑,方二百步,各中开门,出东门一十五步有木,问出南门几何步,而见木?

[**注解**]"邑",城。"方"指正方形边长,见图 1.24 由于$\triangle ABC \backsim \triangle BDE$,故

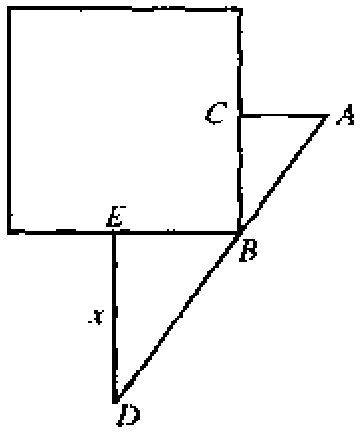


图 1.24

$$\frac{15}{100}=\frac{100}{x}$$

其中 x 是向南走的步数。

(240)题与(239)题同类。

(241)今有邑方,不知大小,各中开门,出北门三十步有木,出西门七百五十步见木,问邑方几何?

[**注解**]设邑方 $2x$ 步,则(见图 1.25)

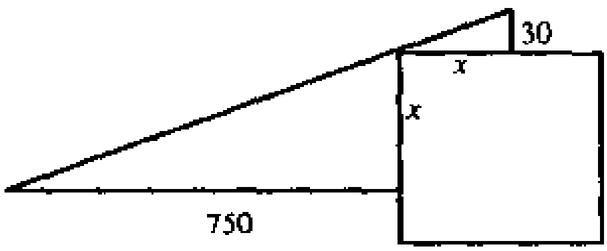


图 1.25

$$\frac{30}{x}=\frac{x}{750}$$

(242)今有邑方,不知大小,各中开门,出北门二十步有木,出南门一十四步,折而西行一千七百七十五步见木,问邑方几何?

[**注解**]设邑方为 x 步,由三角形相似得(见图 1.26)

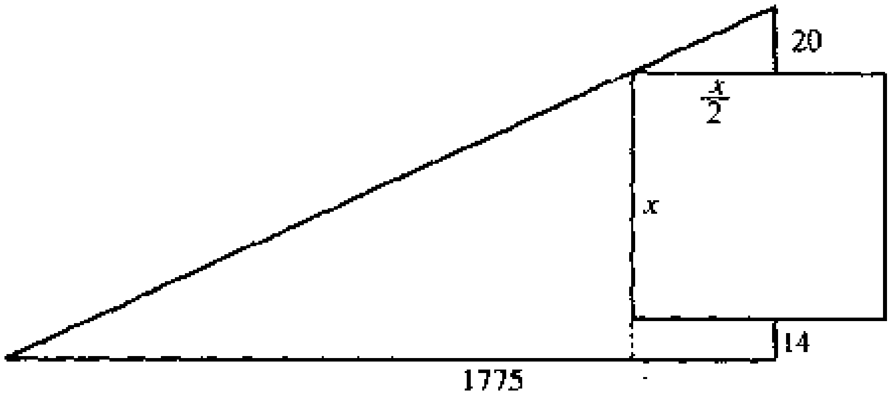


图 1.26

$$\frac{20}{x+14}=\frac{\frac{x}{2}}{1775-\frac{x}{2}}$$

(243)今有邑,方一十里,各中开门,甲乙俱从邑中央而出;乙东出,甲南出,出门不知步数,斜向东北磨邑,适与乙会;率:甲行五,乙行三;问甲乙行各几何?

[注解]"磨邑",擦着城墙角走过去;见图 1.27。

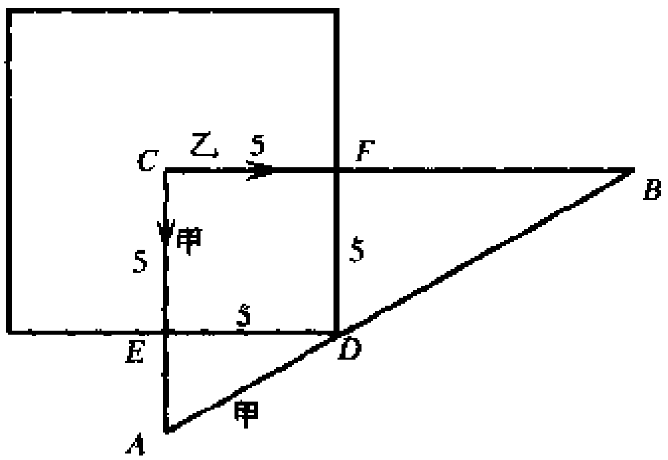


图 1.27

记甲率(速)为 $m=5$,乙率为 $n=3$,则

$$AC:BC:AB=(m^2-n^2):2mn:(m^2+n^2)=$$

$$(5^2-3^2):2\times5\times3:(5^2+3^2)=8:15:17$$

在△ AED 与△ ABC 中，$\frac{AE}{ED}=\frac{AC}{BC}=\frac{8}{15}$，$ED=5$，可求出 AE。在△ AED 与△ BDF 中，$\frac{AE}{5}=\frac{5}{FB}$，从而可求得 FB。于是

乙行程为 $5+FB$，甲行程是 $5+AE+AD+DB$。AD 与 DB 可由勾股定理求得。

(244)有木去人不知远近，立四表，相去各一丈，令左两表与所望之相直，从后右表望之，人前右表三寸，问木去人几何?

[注解]“表”即标杆。“相去各一丈”表示四标杆分别立在一个边长为 1 丈的正方形顶点上，如图 1.28。

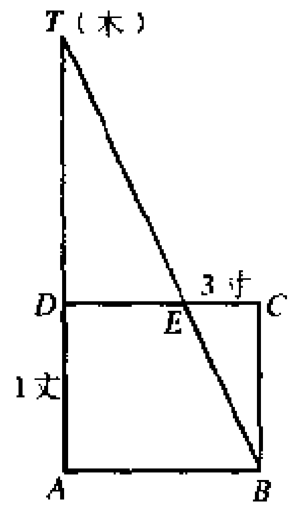


图 1.28

“左两表与所望之相直”，指图 1.28 中 A，D，T 在一直线上；$EC=3$ 寸。设人树相距 $AT=x$ 丈，则

$$\frac{x-1}{x}=\frac{1-0.03}{1}$$

此题所用语言似有辞不达义之嫌，例如“相去各一丈”，两两相距皆一丈吗？这只能是正四面体！是菱形吗？我们只能猜测此语是指四标杆在正方形顶点上。何必让人猜呢？

《九章算术》246 道题无一有插图，不能说这是一种长处。另外，数学符号的短缺和古汉语简练有余而准确不足，加之竖行书写，也给数学带来诸多不便。

《九章算术》问世后的近 2000 年间，在中国传统数学的发展中

始终处于权威的位置,20世纪之前的不少数学家对《九章算术》崇拜到迷信的程度,对其内容表现的水准随意拔高,一部分数学家则不思创新,一味模仿《九章算术》,如果有人对其略表异意或向他国数学学习,则被视为异端。例如19世纪有位名为梅冲的中国数学家,在其著作《勾股残述》中严然以卫道士自居,对人们学习《九章算术》、《周髀算经》等古典算经之外的数学斥之为:"不肯遵守成法,自矜创获,以别列析解,而反失其故步,不算书之弊。"公开遣责别人学习新东西而有所创新,不再故步自封、墨守成规就是弊病,真是岂有此理。

(245)有山居木西,不知其高,山去木五十三里,木高九丈五尺,人立木东三里,望木末适与山峰斜平。人目高七尺,问山高几何?

[注解]见图1.29,设山高 $EF = x$,人 $AB = 7$ 尺,木 $CD = 9$ 丈五尺,$BD = 3$ 里。于是 $EG = x - 9$ 丈五尺,又

$$\frac{GC}{AH} = \frac{EG}{CH}$$

$GC = 53$ 里,$CH = DC - AB$,$AH = BD$,所以可以求得 EG。$EG + CD$ 即为山高。

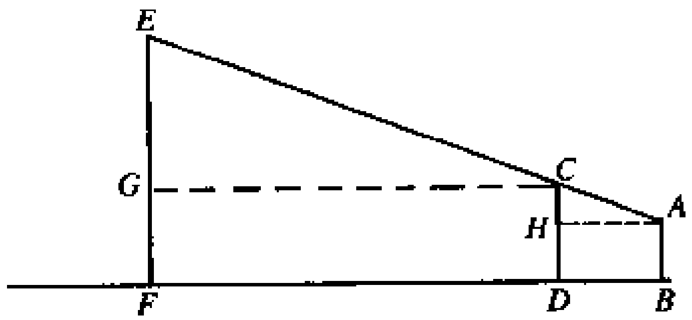


图1.29

(246)今有井,径五尺,不知其深,立五尺木于井上,从木末望水岸,入径四寸,问井深几何?

[注解]见图1.30,木 $AC = 5$ 尺,设井深 $ED = x$ 尺,已知 $BC = 0.4$ 尺,于是

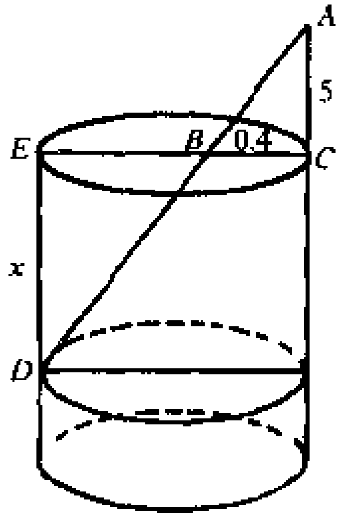


图 1.30

$$\frac{EB}{BC}=\frac{ED}{AC}$$

即

$$\frac{5-0.4}{0.4}=\frac{x}{5}$$

为了阅读与欣赏的方便,我们部分地参考刘徽的《九章算术注》,对《九章算术》246 个原题给出了现代语言的注解。

我们看到,《九章算术》中原载的"术曰",给出的是简短的程序化算法,这种解题风格与今日正在兴起的计算机证明如出一炉,当今数学活动似可借鉴《九章算术》的学术思想,这正是《九章算术》的现实意义。

《九章算术》只"曰术"而不言证,是这部历史名著的明显不足。把一个具体实例解出来了,也就不再说什么了,岂不知,蘑菇总是成堆地生长,止步于一般解法与理论的门槛之下,确实可惜。

事实上,秦朝统一中国之后,实行专制主义的集权统治,执秦始皇之酷法,焚书坑儒,镇压崇尚理论思维与逻辑推理的墨家等学派,禁止百家争鸣的春秋古风,汉武帝则罢黜百家,独尊儒术,把抽象思维视为离经叛道,对于数学,只限于搞点对农耕、徭役、税收、田亩等有关的实际计算,在如此恶劣的秦汉学术环境之下成书的《九章算术》也不能不受时代风云的影响。另外,儒家主张"学有所

止”，只求把具体事情办好，忌讳多言，这种过度谨慎的思想作风对数学的理论思维不利。

《九章算术》中许多题目令人兴趣盎然，可谓引人入胜，实为数学问题中的佳品，例如“牛马羊食人苗”（(86)题），“女子善织”（(88)题），“客去忘持衣”（(172)题），“兔走犬追”（(170)题），“有竹九节”（(175)题），“两鼠对穿”（(196)题），“良马驽马”（(203)题），“五雀六燕”（(213)题），“五家共井”（(217)题），“葛长缠木”（(227)题），“引葭赴岸”（(228)题），“竹折抵地”（(235)题），“甲与乙会”（(236)题）等，每题描述的情景与解法令人忍俊不禁，在中外数学史上传为佳话。

《九章算术》是一部数学史上影响深远的文献，是中国古代数学教育的首选教科书，不仅适于自修，而且适于课堂教学，曾被各朝代规定为国家级教材。容易看出，今日中小学数学课本中不少内容源于《九章算术》，它的一部分内容甚至涉及今日大学的数学内容，例如与希尔伯特第三问题有关的刘徽割补原理，与积分有关的“宛田”问题等。

中国在公元14世纪以前是世界数学强国，我们则应见贤思齐兮，数典而念祖，我们相信，有良好数学传统的中国，可以成为21世纪的数学强国。

3 中国古代最伟大的数学家——刘徽

刘徽生于魏晋时代263年左右，生卒年份与籍贯不详。主要数学著作有《九章算术注》和《海岛算经》两部。

刘徽之前，中国使用的圆周率取值为3，刘徽指出 $\pi=3$ 误差过大，他开始求取比较准确的 π 的近似值。

阮元在《畴人传》中说：“徽创以六觚之面割之又割，以求周径相之为率，厥后祖冲之更开密法，仍是割之又割耳，未能于徽法之外，另立新术也。”刘徽得出 $\pi=3.1416$，3.1416今已成为家喻户晓的数学常识。觚(gū)是古代酒具，觚口为正六边形，刘徽由圆内接

正六边形开始,不断地细分圆周,逐渐求得 π 的更准确的近似值,之后,祖冲之父子继承刘徽的这种"割之又割"的技术,求得比3.1416更准确的圆周率。

2002年,中国邮电部发行刘徽纪念邮票,刘徽已被我国公认为古今最伟大的文化名人之一。

刘徽的《九章算术注》影响深远,是之后1000余年中国数学家成长的最重要的教科书。《九章算术注》纠正了《九章算术》中的若干错误,全面论述《九章算术》"术曰"中的解法与公式。《九章算术注》是东方数学的代表作,为我国古代数学的奠基文献。

刘徽长于几何,在代数方面也贡献颇丰,例如开平方与开立方的近似计算、正负数的运算、等比与等差级数的求和以及代数方程等方面都作了重要工作。尤其令人感兴趣的是他已经认识到无理数的概念,刘徽说:"凡开积为方,方之自乘当还复其积分。令不加借算面命分,则常微少;其加借算而命分,则又微多,其数不可得而定,故以面命之,为不失耳。"

刘说的"方"指正数的算术平方根,"积"指被开方数,他是借用"正方形面积为边长自乘"中的"积"字,即 $a \cdot a = s$ 中,s 为积,a 为方。当时中国只知道整数和分数,不知无理数为何物;所谓"其数可得而定",则是指可以由积 s 算出一个用整数或分数表达的方,否则,"其数不可得面定",即方不可表示成整数或分数,这种开平方"不可得面定"的数,刘微定义其为"面",可见刘徽所称的"面"就是今天所称的无理数的一部分。

刘徽真是聪明,不愧为中国为数不多的有思想的数学家,他在开方实践中领会到这种"不可得而定"的数的存在性,但有一个关键问题是刘徽没有进一步考虑的,即如何证明这种"面"的存在性?这个证明是不可缺的。例如一个正数 s 是某有理数 a 的平方,但 a 是小数点后 100^{100} 位的有尽(不循环)小数,有多少时间去进行开方试算,即用"不加借算"面得到不足近似值或用"加借算"得到过剩近似值,从面逐步得出 a 的值呢?如果经过了 10^{100} 位小数的确定后,仍得不到准确的平方根就宣布 a 是"面",那就错了。易知,

用开方运算来判定 a 是否无理数是不可行的事，一个数是否无理数必须有严格的逻辑证明，而这正是古代中国数学所缺乏的。

如果硬说刘徽已经建立了无理数理论，那就不够准确了，应该说，我国古人已经感知了无理数的存在。

刘徽是一位讲究解题技巧的高明数学家，下面介绍刘徽解出的若干问题，以展示他的数学思想之特点。

(1) 别出心裁的勾股定理证明。图 1.31 是刘徽设计的勾股定理的证明图。他运用自己创建的割补原理，用图 1.31 证明了勾股定理，这简直是一篇无字论文，其严密机敏的程度令人赏心悦目！

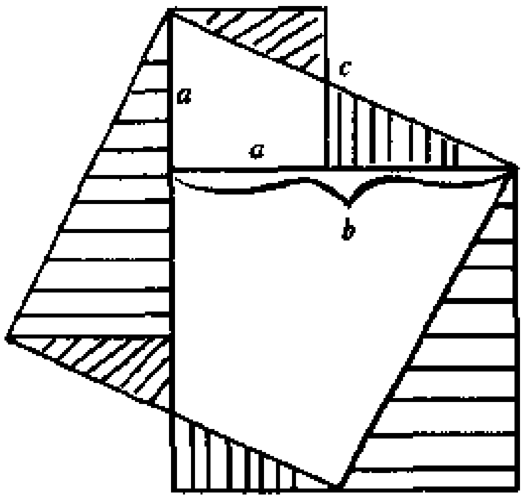


图 1.31

(2)《九章算术》有题曰："今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺，引葭赴岸，适与岸齐，问水深、葭长各几何？"

刘徽注曰："此以池方半之，得五尺为勾，水深为股，葭长为弦，以勾及股弦差求股弦。故令勾自乘，先见矩幂也，出水者，股弦差，减此差于矩幂则余之，倍差为此幂之广，水深是股，令此幂除倍出水二尺为广，故得水深也。"

这段话的含义(见图 1.32)是

$$水深 = b = \frac{a^2-(c-b)^2}{2(c-b)} = \frac{5^2-1^2}{2\times 1} = 12(尺)$$

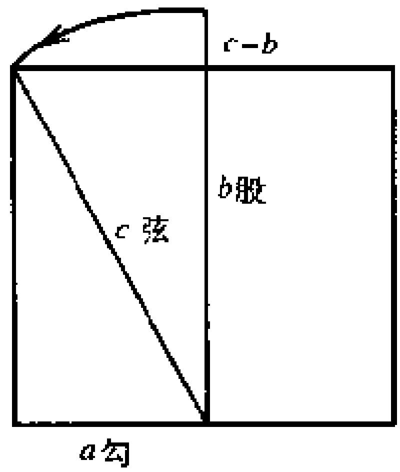


图 1.32

事实上刘徽的算法公式

$$b = \frac{a^2(c-b)^2}{2(c-b)} \tag{1.14}$$

等价于勾股定理 $c^2 = a^2 + b^2$,也就是说

$$b = \frac{a^2(c-b)^2}{2(c-b)}$$

是勾股定理的另一种写法,在刘徽的手里,勾股定理如掌中皮球,随心所欲,形变而量不变。

印度数学家婆斯加罗(Bhaskara,1141—1225)在其著作中有一题目,除数据有别外,几乎与《九章算术》中上述“引葭赴岸”题一模一样,不知是否是印度僧人“东天取经”,从我国抄袭去的。婆氏的题目用诗文的形式写出如下:

莲花问题

湖平浪静出新莲,五寸婷婷露笑颜。

孰意风狂玉枝倒,忍看花色没波涟。

渔翁秋后寻根源,根距残花二尺边。

借问群英贤学子,水深多少在当年?

对此印度题目,只要取 $c-b=0.5$ 尺,$a=2$ 尺,代入刘徽公式(1.14)即得水深 b。

(3) 刘徽的名著《海岛算经》是应用三角形相似原理以及比例

线段理论解决测量等各种实际难题的专著。

例如《海岛算经》上有一题：

“今有望海岛，立两表齐高三丈，前后相距千步，令后表与前表三相直；从前表却行一百二十三步，人目著地取望岛峰，亦与表末三合，问岛高及去表各几何？”

刘徽“术曰”：“以表高乘表间为实，相多为法，除之，所得加表高，即得岛高。求前表去岛远近者，以前表却行乘表间为实，相多为法，除之，得岛去表里数。”见图 1.33。

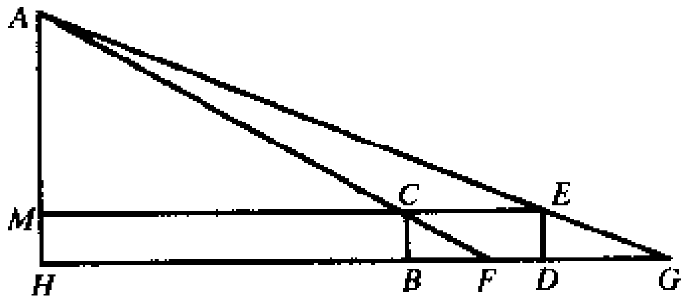


图 1.33

上述“术曰”写成公式形式即为

$$岛高 = \frac{表高 \times 表间}{(后表却行 - 前表却行)} + 表高 \tag{1.15}$$

$$岛去表 = \frac{前表却行 \times 表间}{(后表却行 - 前表却行)} \tag{1.16}$$

下面证明公式(1.15)与公式(1.16)的正确性。

由于 $AH \parallel BC$，所以

$$\frac{BC}{AH} = \frac{BF}{HF} \tag{1.17}$$

由于 $ED \parallel AH$，所以

$$\frac{ED}{AH} = \frac{DG}{HG} \tag{1.18}$$

由式(1.17)与式(1.18)得

$$AH = \frac{BC \times HF}{BF} = \frac{BC \times GH}{DG}$$

从而

$$\frac{HF}{BF}=\frac{GH}{DG}$$

$$\frac{HB+BF}{BF}=\frac{HB+BD+DG}{DG}$$

$$\frac{HB}{BF}=\frac{HB+BD}{DG}$$

进而得出

$$HB\times DG=BF\times HB+BF\times BD$$
$$HB(DG-BF)=BF\times BD$$
$$HB=\frac{BF\times BD}{DG-BF}$$

即公式(1.15)成立。

由于 $AH=\dfrac{BC\times HF}{BF}$,又 $HF=HB+BF$

于是

$$AH=\frac{BC\times(HB+BF)}{BF}=$$
$$\frac{BC\times\left(\dfrac{HF\times BD}{DG-BF}+BF\right)}{HF}=$$
$$BC\times\left(\frac{BD}{DG-BF}+1\right)=$$
$$\frac{BC\times BD}{DG-BF}+BC$$

即公式(1.14)成立。

(4) 在《九章算术》"五家共井"一题中,刘徽看透那是个不定方程组,且巧妙地解出了此不定方程组。

刘徽"术曰":"法得七百二十一,实七十六"。进而他又说:"是故七百二十一为井深,七十二为戊绠之长,举率以言之。"

"举率"二字指这里说的是比例,可见刘已洞悉此题乃不定方程,外国人称此种方程为丢番图(Diophantws,250—275)方程,丢番图的年龄与刘徽差不多。

(5) 刘徽在《九章算术》"牛马羊食人苗"与"女子善织"两题中

给出了等比级数的求和方法。

(6) 刘徽在《九章算术》"良马驽马问题"中讨论了等差级数的理论。

(7) 对于勾股数公式,刘徽给出一个巧妙的证明。

刘徽曰:"股自乘为幂,如并而一,所得为勾股差。"即若 a,b,c 分别为勾股弦,则

$$\frac{b^2}{c+a}=c-a \tag{1.19}$$

刘又曰:"加差于并,而半之为弦。"即

$$c=\frac{1}{2}\left[\frac{b^2}{c+a}+(c+a)\right] \tag{1.20}$$

刘再曰:"以弦减差,余为勾。"即

$$a=c-(c-a) \tag{1.21}$$

若记 $\frac{b}{c+a}=\frac{n}{m}$,则由式(1.19)、式(1.20)和式(1.21)得

$$a:b:c=m^2-\frac{m^2+n^2}{2}:mn:\frac{m^2+n^2}{2}$$

此即今日的勾股数公式,其中 m,n 是互素自然数。

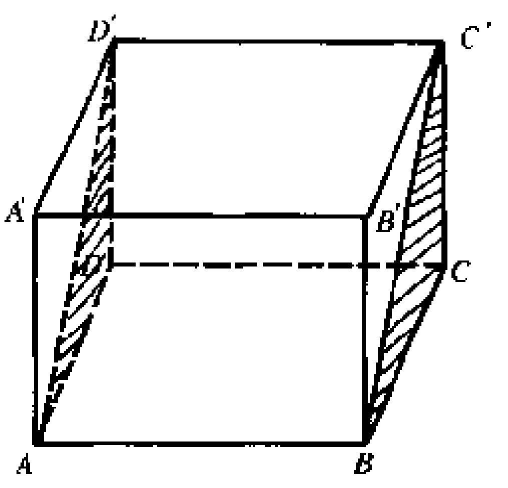
这一公式古希腊的毕达哥拉斯、柏拉图和古巴比伦人在刘徽之前都曾得出,但刘徽的证法别出一格。

所谓勾股数是指 3 个整数 a,b,c。它们恰是一个直角三角形的三边之长,且无大于 1 的公因数,这种勾股数为边长组成的三角形称为本原三角形。

(8) 关于堑堵、阳马与鳖臑的刘徽定理。

在图 1.34(a)中,$ABCD-A'B'C'D'$ 是直四棱柱,底是长方形。则 $D'C'-ABCD$ 称为堑堵,它是一个直三棱柱,底为直角三角形;$D'-ABCD$ 称为阳马,它是底为长方形,一侧棱与底面垂直的四棱锥;$D'-BCC'$ 称为鳖臑,它是各面皆直角三角形的四面体见图 1.34(b)。

对于图 1.34 的情形,刘徽建立了下列 3 个定理。



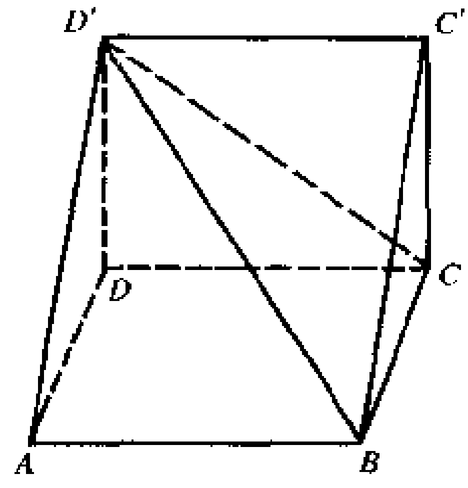


图 1.34

刘徽定理 1 “邪解立方,得两堑堵,虽复椭方,亦为堑堵,故二而一。”即

$$堑堵体积 = \frac{1}{2}(长 \times 宽 \times 高)$$

刘徽定理 2 “邪解堑堵,其一为阳马,一为鳖臑。”

刘徽定理 3 “阳马居二,鳖臑为一,不易之率也。”即堑堵剖分成的阳马与鳖臑体积比为 2:1。

由上述定理容易求得堑堵、阳马、鳖臑的体积,而由刘徽的割补原理,对于多面体,若可以把它剖分成堑堵、阳马或鳖臑这 3 种最基本的立体,则进而求得多面体的体积。在《九章算术注》中,刘徽如此解了不少题目。

(9) 牟合方盖的刘徽公式。高等数学当中有一道名题:“求两个底圆半径相等的直交圆柱面所围的立体之体积。”

1700 多年前,我国数学家刘徽首先研究上述立体的体积,他把此立体称为“牟合方盖”,因为它的形状和河北省乐亭县一带用高粱秆的细篾编成的蝈蝈笼子很相像,“牟”即蛑,指蝈蝈蟋蟀等昆虫,“合”即盒,笼子。也有人说方盖是伞,牟是相同的意思,牟合方盖指两把相同的伞打开后合在一起的样子。刘徽得出下面公式。

刘徽公式

$$\frac{V_{合}}{V_{球}} = \frac{4}{\pi} \tag{1.22}$$

其中 $V_{合}$ 是牟合方盖的体积，$V_{球}$ 是牟合方盖内切球的体积。

刘徽利用所谓刘祖等积定理证明了公式(1.22)。

刘祖定理 夫叠棋成立积，缘幂势既同，则积不容异。

此定理由刘徽与祖暅独立发现且在各自的研究工作当中使用。

用现在的语言来讲，用平行于给定平面的任一平面截两个有界立体，若截面面积相等，则两立体体积亦等。

下面是刘徽当时对公式(1.22)的证明(我们用现代语言表述)：

事实上，用任一水平平面截牟合方盖与其内切球时(不妨设形成牟合方盖的两圆柱的轴是水平的)，则截得的截面分别为一个正方形和这个正方形的内切圆，设此圆半径为 r，则两者面积比为(见图 1.35)

$$S_{合}:S_{球} = 4r^2:\pi r^2 = \frac{4}{\pi}$$

由刘祖定理得知

$$\frac{V_{合}}{V_{球}} = \frac{4}{\pi}$$

证毕。

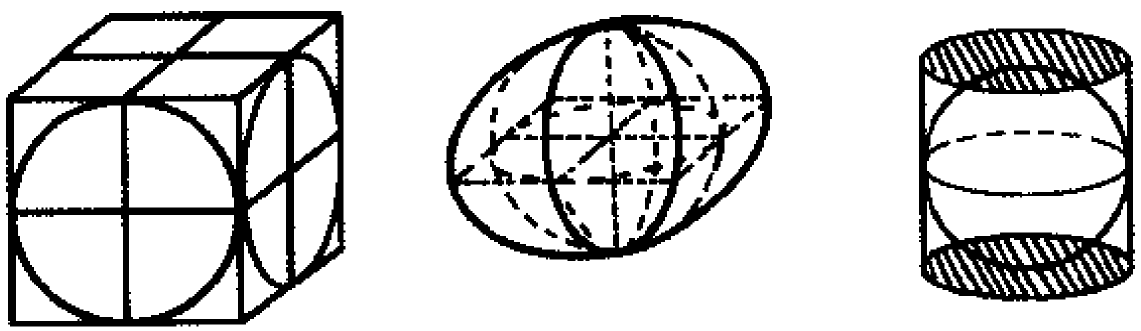


图 1.35

刘徽未能求出牟合方盖的体积，他说："观立方之内，合盖之外，虽衰杀有渐，而多少不掩。判合总结，方圆相缠，浓纤诡互，不可等正。欲陋形措意，惧失正理。敢不阙疑，以俟能者言。"

后来果然等来了"能者"，能者既祖冲之之子祖暅，祖暅沿用刘徽运用刘祖等积定理的思路，求得牟合方盖的体积为$\frac{16}{3}r^3$，r是内切球之半径。

勿庸讳言，古代世界最伟大的数学家，号称"数学之神"的阿基米德(Archimedes，公元前287—公元前212)在其名著《方法》一书中得出结论说：

一圆柱内切于立方体，其上下底在立方体两相对侧面上，侧面切于立方体另外四个侧面，又另一内切圆柱，其上下底在立方体另两个相对的侧面，其侧面切于立方体四个侧面，则这两个柱体的共公部分的体积是此立方体体积的$\frac{2}{3}$。

如果在上述内切圆柱内再放一内切球，阿基米德得出了下面的所谓"阿基米德$\frac{2}{3}$定理"：

$$\frac{\text{球体积}}{\text{外切圆柱体积}}=\frac{\text{球面积}}{\text{外切圆柱表面积}}=\frac{\text{牟合方盖体积}}{\text{外切立方体体积}}=\frac{2}{3}$$

中国的刘徽、祖暅不懂希腊文，所以我国刘、祖的结论是独立于阿基米德得到的，正可谓圣贤之见略同。

刘徽著《海岛算经》，书中有不少测量海岛之类的内容，在刘徽所作《九章算术注序》中，有"又况泰山之高与江海之广哉"这样的话，有人推断刘徽是山东淄博市淄川人，在《九章算术注序》中有"立两表于洛阳之城，令高八尺。"这样的话，可以推断刘徽在山东、河南这些当时文化发达地区活动频繁。

刘徽对封建制度之下政治统治的残暴和教育制度的腐朽十分厌恶，他在《九章算术注序》中愤然叹道："往者暴秦焚书，经术散坏。"对于数学，"当今好之者寡，故世虽多通才达学，而未必能综于此耳。"所谓"通才达学"是指只读孔孟之道宣扬对皇帝愚忠

愚孝的封建典籍者，刘徽生活在三国时代，他对曹操的凶残，刘备的虚伪和孙权的奸诈的了解与体会比现代人更为直接和深切，三国当权派，哪一个倡导过科学技术？孔明虽聪明有余，鞠躬尽瘁终其一生也无非是一保皇派耳！在如此的社会背景之下，刘徽能不贪官场的所谓荣华富贵，潜心数学研究，实乃后人做学问做人之楷模。

刘徽不仅是应用数学的专家，而且对精细的数学理论，亦有深刻的思想，例如在用割圆术求 π 的近似值时，他已经明确意识到极限的概念，他说："割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。"前面我们讨论过刘徽提出"面"的概念，实际上是有理数逼近无理数的思想，而刘祖等积定理则是一个积分学的定理。

刘徽主张研究数学需要"析理以辞，解体用图。"既重视逻辑思维的"析理"，又重视几何意义的"用图"。事实上，一个数学概念或理论，只有从几何直观上能看得透才算研究透彻了，而且直观往往是重要数学思想与证明方法的启示与源泉，我们有一条不成文的规矩，在难题面前，能画图（示意图也可）时必先画图，而几何学与图论等干脆是研究图形的科学。

4 祖家父子与 π

祖冲之，祖籍河北来源，生于公元429年（宋文帝元嘉6年），于公元500年（齐永元二年）去世，先辈迁居江南，祖父祖昌任朝廷大匠卿，从事土木建筑，其父祖朔之学识渊博，是朝廷的文官。祖冲之自幼耳濡目染，熏陶于既重视科学技术又有浓厚文化底蕴的家庭氛围之中，形成了崇尚科学技术又文雅精细的思想性格，从青年时代起，进人华林书省，那里是国家级讲学藏书的机关，祖冲之在此博览群书，思考问题，进行科研活动。后来祖冲之误入仕途，任南徐州（今江苏镇江市）从事史（州刺史助理），又人朝任公府参军，以及谒者仆射（朝宴主持人）等职，最后官至长水校尉（将领

级),享四品俸禄。

看起来,似祖冲之这般有数学天才者,亦难免于中国知识分子学而优则仕的传统性顽症,为追求浮名私利,浪费才能,实在可惜。设想祖冲之能终生致力于数学研究,凭他的聪慧与睿智,恐怕他不止获得 π 的 7 位准确值等,会有更多的学术贡献留给后人。

祖冲之和刘徽相似,也为《九章算术》作注,史书《南齐书》和《南史》上记载,祖冲之"注《九章》,造缀术数十篇。"《隋书·律历志》上记载祖冲之著书《缀术》(共五卷),唐朝曾把《缀术》定为数学教科书,日本和朝鲜等国也用《缀术》做过教材。但由于唐朝主管教育的官吏对数学蒙昧无知,根本看不懂《缀术》,不理解书中的微言大义,竟下令在全国废止《缀术》做教材,唐相魏征所撰的《隋书》上说:"学官莫能查其深奥,是故废而不理。"

祖冲之对《九章算术》作的注水平不在刘徽注之下。

祖冲之的最大贡献是求得 π 的近似值为

$$\pi\in(3.1415926,3.1415927)$$

即确定了 π 的 7 个准确的有效数字。

由于祖冲之的杰出工作,我国邮电部发行了祖冲之纪念邮票,且把紫金山天文台 1964 年 11 月 9 日发现的小行星命名为"祖冲之星"。1959 年,苏联宇宙火箭发现的月球环形山命名为"祖冲之山"。我国伟大的数学家祖冲之的学术成就与日月齐辉,人品与学风为人间楷模。

祖冲之把 π 用分数来近似:

$\pi\approx\frac{22}{7}$称为疏率,$\pi\approx\frac{355}{113}$称为密率。

祖冲之得到的 π 的近似值需要把圆周进行两万四千多等分,可知其具体工作之艰巨与精细。

1912 年,日本数学家三上义夫提议把 $\pi\approx\frac{355}{113}$称为"祖率"。

从 480 年到 1429 年,祖率在世界数学史上领先了 900 多年。

下面列出关于 π 的大事年表。

(1)瑞士,欧拉(Euler),1737 年首次用 π 表示圆周率。

(2)巴比伦、埃及、中国,公元前 2000 年,$\pi\approx 3$。

(3)希腊,阿基米德(Archimedes),公元前 240 年,$\pi\approx 3.14$,$\pi\in\left(\frac{223}{71},\frac{22}{7}\right)$。阿波罗尼奥斯(Apllonius,公元前 262—公元前 190),$\pi\approx 3.1416$。

(4)希腊,托勒玫(C. Ptolemy),公元前 150 年,$\pi\approx 3.1417$,$\pi\approx\frac{377}{120}$。

(5)中国,刘徽,263 年,$\pi\approx 3.1416$。

(6)印度,阿耶哈达(Aryabhata),450 年,$\pi\approx 3.1416$。

(7)中国,祖冲之,480 年,$\pi\in(3.1415926,3.1415927)$。

(8)伊朗,卡西(Jamshidal Kashi),1429 年,π 准确到小数点后 16 位。

(9)法国,韦达(F. Viete),1579 年,

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots \quad (\text{无穷乘积})$$

(10)荷兰,阿德里恩·范·罗梅(Adriaen Van Roomen),1593 年,π 准确到小数点后 15 位。

(11)德国,路多耳夫·范·科伊伦(Ludolph Van Ceulen),1610 年,用 2^{62} 边形算出 π 的小数点后第 35 位,他的一生大部分时间用在此项工作上,他的墓碑上刻的就是 π 的这个近似值,德国人称之为“路多耳夫数”。

(12)荷兰,格林贝尔格(Grienberger),1630 年,π 准确到 39 位小数,这是用周长法求 π 的最后的尝试。

(13)英国,约翰·沃利斯(John Wallis),1650 年,

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1\cdot 2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot\cdots}$$

(14)英国,洛尔德·布龙克尔(Lord Brouncker),1650 年,

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cdots}}}$$

(15)苏格兰,詹姆斯·格雷奇里(James Gregory),1671 年,

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

(16)苏格兰,亚伯拉罕·夏普(Abrahan Sharp),1699 年,利用詹姆斯公式求得 π 的 71 位小数。

(17)苏格兰,约翰·梅钦(John Machin),1706 年,

$$\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239}$$

算得 π 到 100 位小数。

(18)法国,代·拉尼(De lagny),1719 年,π 准确到小数 112 位。

(19)德国,兰伯特(Johann Heinrich Lambert),1767 年,证明 π 是无理数。

(20)法国,蒲丰(Comte Bullon),1777 年,投针求 π:水平线距皆 a,针长 $l<a$,针与一平行线相交的概率为 $p=\frac{2l}{\pi a}$;拉泽里尼(意)投针 3408 次,求得 π 的 6 位小数。

法国,查尔特勒斯(R. Chartres),1904,任意两个整数互素的概率为$\frac{6}{\pi^2}$。

(21)法国,勒让德(Adrien Marie Legendre),1794 年,证明 π^2 是无理数。

(22)英国,威廉·卢瑟福(William Rutherford),1841 年,

$$\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{70}+\operatorname{arctg}\frac{1}{99}$$

得到 π 的 152 位小数。

(23)德国,达瑟(Zacharias Dase),1844 年,

$$\pi=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}$$

得到 π 的 200 位小数。

达瑟是心算能手，他心算出两个 100 位数的乘积和 100 位数的平方根，可惜英年早逝，亡年仅 37 岁。

(24)德国，卢瑟福，1853 年，π 准确到 400 位小数。

(25)英国，香克斯(William Shanks)，1873 年，π 准确到 707 位小数。

(26)德国，林德曼(F. Lindemann)，1882 年，证明 π 是超越数，从而得证规尺不可化圆为方，解决了这个 2000 多年的难题。

(27)美国，弗格森(D. F. Ferguson)，1947 年，π 准确到 710 位小数。

(28)美国，小伦奇(J. W. Wrench, JR)和弗格森(D. F. Ferguson)，1948 年，π 准确到 808 位小数。

(29)美国，马利兰德，首次用计算机 ENIAC 算 π，1949 年，π 准确到 2037 位小数。

(30)法国，裘努埃(Francois Genuys)，1959 年，用 IBM704 算 π，准确到 16167 位小数。

(31)美国，伦奇和香克斯用 IBM7097 算 π，1961 年，准确到 100265 位小数。

(32)法国，吉劳(M. Jean Guilloud)，1966 年，用 STRETCH 计算机算 π，准确到 250000 位小数。

(33)法国，吉劳，1967 年，用 CDC6600 计算机算 π，准确到 500000位小数。

(34)法国，吉劳，1973 年，用 CDC7600 计算机算 π，准确到 1000000 位小数。

(35)日本，鹿角理三吉(Kazunori Miyoshi)和久仲山(Kazuhika Nakayama)，1981 年，用 FACOMM－200 计算机，使用公式

$$\pi = 32\mathrm{arctg}\frac{1}{10} - 4\mathrm{arctg}\frac{1}{239} - 16\mathrm{arctg}\frac{1}{515}$$

算得 π 准确到 2000038 位小数。

(36)美国，贝利(D. H. Baily)，1986 年，在 Cray－2 巨型机上用 28 小时算出 π，准确到 29360000 位小数。

(37)日本，廉正蒲田(Yasumasa Kanada)，1986年，用NECSX-2巨型机计算π，准确到134217700位小数。

在众多数学与计算机专家求π的过程中，发现了一些很有启发性的现象，例如314159数字段重复过6次，但从未见到0123456789数字段的出现。

有人定义一个数x如下：

$$x=\begin{cases}(-1)^k, & k\text{ 是 }\pi\text{ 中第一次出现 0123456789 数字段时 0 在小数点后的位数}\\ 0, & \text{若 }\pi\text{ 中无 0123456789 数字段}\end{cases}$$

x=？

其实这种问题要多少有多少，例如问：π中有无10个9连排的现象？有无10个8连排的现象，等，这种问题都是极难解决的！

为了研究与确定π，数学家们得出了众多重要成果，π是数学中“会下金蛋的鹅”。

祖冲之是中国古代著名的天文学家，其实中国古代不少数学家都是天文学家。各朝君主皆重视历法，因为它与农业季节有关，同时也与皇家迷信、祈天祭地、自愚愚民有关。天文历法的内容则主要依靠观测与计算。

祖冲之编制的《大明历》是当时最为科学最为实用的历法，被全国采纳使用80年，祖冲之确定冬至时刻的算法一直沿用到清代，他算出一个回归年为365.2428日，与现代的365日5时48分46秒相差无几，这个结果在全世界领先了700多年。

在制历过程中，针对地、月运行的周期性，祖冲之创造性地运用同余的数学方法，为同余方程组的理论与解法提供了丰富的原始创新。为后人秦九韵的“大衍求一术”打下了基础。

祖冲之的子孙也都是有突出才能的人。

祖暅(Zu Geng，5世纪—6世纪)，祖冲之之子，中国古代杰出的数学家和天文学家，《南史》称祖暅“少传家业，究极精微，已有

巧思。"《南史》上记录了祖暅下面的故事:一日祖暅边行路边思考一个数学问题,一头撞到徐勉(当时一位官吏)身上,徐疼而大叫,祖暅才发现题外事,连忙向徐道歉。祖对数学人迷执着的程度,由此可见一斑。

祖暅对家父的《大明历》和《缀术》进行了修订与补充,且鼎力推广。504年,祖暅上书梁武帝肖衍,指出何承天编的《元嘉历》多处疏漏,建议起用《大明历》,未被肖衍采纳,5年后,祖暅答辩新旧历法的优缺点,经观测数据之检验,证明《大明历》为优,肖衍颁布皇榜,令天下实行《大明历》。

然祖暅终因长期在朝廷为官,而身受监牢之苦,其子祖皓,亦因效忠朝廷而死无整尸。513年,祖暅效力的南梁与北魏开战,魏降将王足向梁武帝献策,在淮河筑坝积水,等水势抬高,再放水冲灌被魏军占领的寿阳城(今安徽寿县)。朝廷派"材官将军"祖暅前去考察工程现场,祖回奏梁武帝说此事不可行,梁武帝不接受祖暅意见,按王足的坏主意办了,结果水淹寿阳,魏军虽退,但两岸数百虽一片泽国,百姓死伤惨重。到头来,梁武帝反拿祖暅为替罪羊,516年把祖暅投入监狱,关押数年。直到梁武帝之子肖综继位,525年,肖综兵败徐州,祖暅等人被魏军劫持到徐州。魏国徐州安丰王元延明崇敬祖暅这位江南才子和著名科学家,对祖暅以礼相待。

祖暅的儿子祖皓也精于天文和数学,文武双全。《南史》上称"暅之子皓,志节慷慨,有文武才略,少传家业,善算功。"可惜祖皓亦贪图仕途,曾做江都县令,后提拔为广陵太守,相当于现在的警备区司令,祖皓在一次战争中失利而亡。《南史记载》:"城陷,皓见执,被缚射之,箭遍体,然后车裂以徇。"又一位在数学上有天才有前途的人才白白为皇家送了命。

祖暅是当时江南最著名的数学家,对数学产生过深远的影响,主要成果是前面提到的刘祖等积定理和对牟合方盖体积与球体积的研究成果。

祖暅继承刘徽的工作,计算出牟合方盖的体积公式为

$$V_{合} = \frac{16}{3} r^3$$

其中 r 是内切球半径。

图 1.36 中 $D' - ABCD$ 是牟合方盖的 $\frac{1}{8}$。把以 r 为边长的立方体 $ABCD - A'B'C'D'$ 内的正四棱锥 $O - A'B'C'D'$ 向右平行移出去，再用与立方体下底相距为 h 的平面截 $D' - ABCD$ 与 $O - A'B'C'D'$，则可以证明左图与右图中阴影区的面积相等，由刘祖等积定理，在立方体 $ABCD - A'B'C'D'$ 内 $D' - ABCD$（牟合方盖的 $\frac{1}{8}$）以外的那部分体积与 $O - A'B'C'D'$ 的体积相等，从而

$$D' - ABCD \text{ 的体积} = r^3 - \frac{1}{3} r^3$$

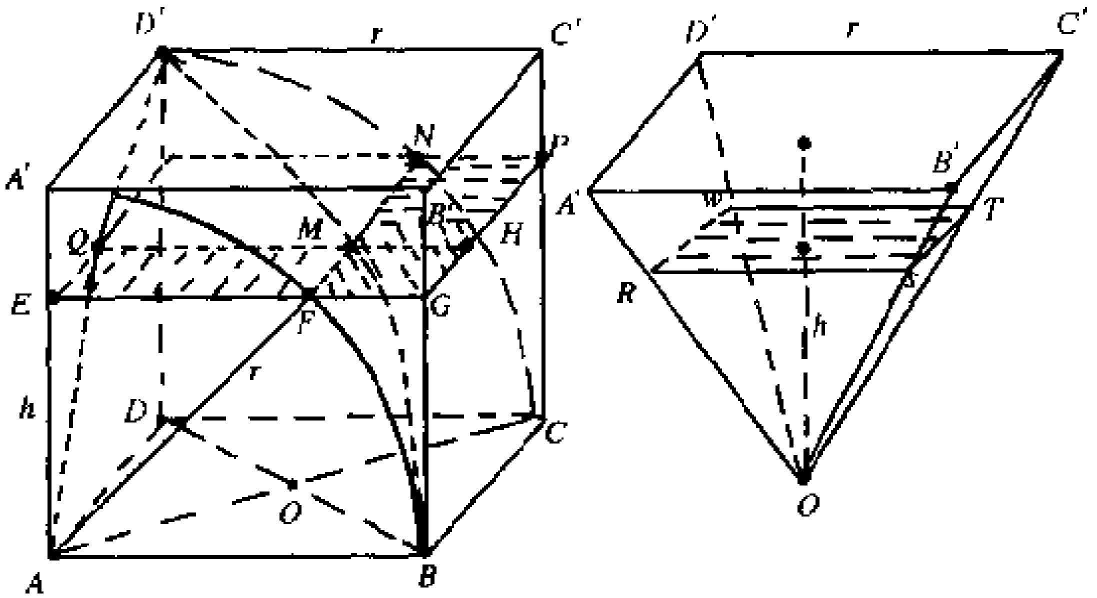


图 1.36

整个牟合方盖的体积

$$V_{合} = 8 \times \left(r^3 - \frac{1}{3} r^3 \right) = \frac{16}{3} r^3$$

事实上，$EF = \sqrt{r^2 - h^2}$，$FG = r - \sqrt{r^2 - h^2}$，又 $FGHM$ 是正方形，矩形 $FMQE$ 与 $MHPN$ 是全等形，所以左图阴影区面积为

$$2[\sqrt{r^2-h^2}(r-\sqrt{r^2-h^2})]+(r-\sqrt{r^2-h^2})^2=$$

$$2r\sqrt{r^2-h^2}-2r^2+2h^2+r^2-2r\sqrt{r^2-h^2}+r^2-h^2=h^2$$

右图阴影区面积亦为 h^2,可见左、右图阴影区面积相等,祖暅的牟合方盖体积公式得证。

由刘徽公式

$$\frac{V_{合}}{V_{球}}=\frac{4}{\pi}$$

得

$$V_{球}=\frac{\pi}{4},V_{合}=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{16}{3}r^3=\frac{4}{3}\pi r^3$$

现代微积分中是用二重积分来求牟合方盖的体积的,为了与祖暅的方法做比较,我们在此把积分过程简介如下。

设圆柱底半径为 r,两正交圆柱的方程为

$$x^2+y^2=r^2,x^2+z^2=r^2$$

见图 1.37。

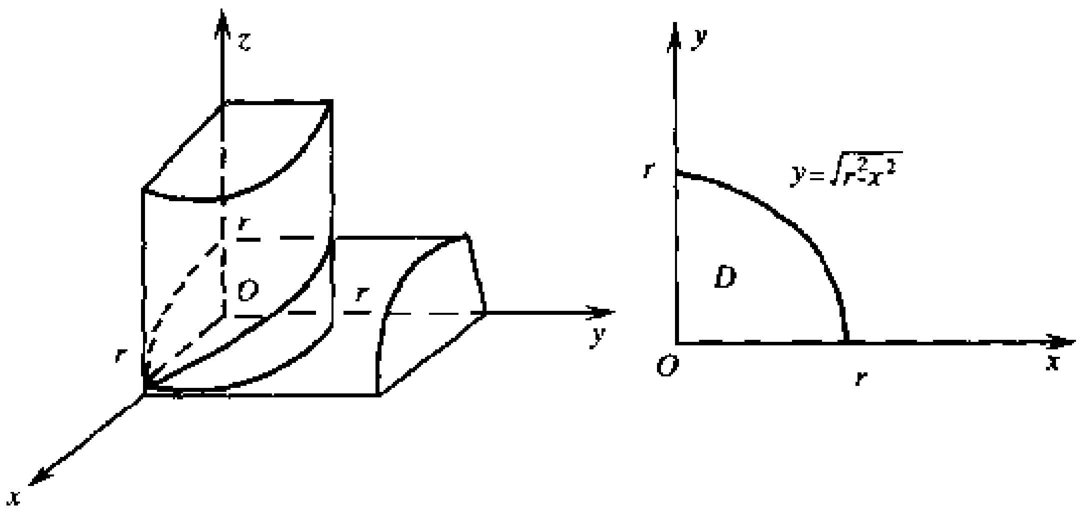


图 1.37

牟合方盖的 $\frac{1}{8}$ 是一个曲顶柱体,底为

$$D=\{(x,y)|0\leqslant y\leqslant\sqrt{r^2-x^2},0\leqslant x\leqslant r\}$$

顶曲面的方程是 $z=\sqrt{r^2-x^2}$,于是

$$\frac{1}{8}V_{合}=\iint_{D}\sqrt{r^2-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}\sqrt{r^2-x^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=$$

$$\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}y\Big|_{y=0}^{y=\sqrt{r^2-x^2}}\mathrm{d}x=$$

$$\int_0^r(r^2-x^2)\mathrm{d}x=$$

$$\frac{2}{3}r^3$$

所以 $V_{合}=\frac{16}{3}r^3$。

5　唐宋元五杰——僧、秦、杨、李、朱

唐宋元是中国古代数学的全盛时期，这一时期，出了下面5位杰出的数学家：

僧一行、秦九韶、杨辉、李冶和朱世杰。

1）僧一行与二次不等距插值法

一行（Yi Xing，683—727），唐朝人，原名张遂，生于今河南省南乐县，曾祖父张公谨任襄州都督，父张擅任武功县令；一行自幼敏而好学，博览百家经典，青年时代即以学识渊博而著称于世。

武则天之侄，纨绔子弟武三思仰慕张遂的名气，欲与张遂结交，企图以结交名家为友来提高自己的声誉，张遂不肯与此等无耻之辈为伍，为躲避武三思之纠缠，剃度为僧，取法名"一行"，隐居嵩山与天台山，专心研修佛经、数学与天文学；后朝廷多次下诏张遂回朝，张遂不应。直至721年，受唐玄宗之命，主持编制新历法，725年开始编制《大衍历》，一行埋头两载，写就《大衍历》手稿后英年早逝！卒年仅44岁。《大衍历》于729年颁布全国实行。《大衍

历》比那时已有的历法更精确，734 年传入日本，日本国照行《大衍历》百余年。

为编制计算历法之需，一行创造了正切函数表和二次不等距插值算法，比牛顿的二次内插法早了千年，实为我国计算方法学科上的丰碑。

所谓二次不等距插值算法，用现代语言来讲就是：

对于三次连续可微的函数 $f(x)$，在点 x_0,x_1,x_2 上的函数值 $y_k=f(x_k)$已知，$k=0,1,2$，在插值区间

$$I=\left[\min_{0\leqslant i\leqslant 2}\{x_i\},\max_{0\leqslant i\leqslant 2}\{x_i\}\right]$$

上任一点 x，$f(x)$的值可按下面二次多项式来近似计算：

$$f(x)=P_2(x)+R_2(x)$$

其中

$$P_2(x)=y_0+y_{0,1}(x-x_0)+y_{0,1,2}(x-x_0)(x-x_1)$$

$$y_{0,1}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},\quad y_{1,2}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$y_{0,1,2}=\frac{y_{1,2}-y_{0,1}}{x_2-x_0}$$

$$R_2(x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),\xi\in I$$

当年高僧一行的不等距内插法在表达形式上与上面的解析表达方式自然不一，由于当时中国的数学符号与书写方式的落后，一行的算法只能用古汉语竖行写出，但其计算的实质与现代公式是等效的。

张遂没有给出二次不等距插值算法正确性的证明。事实上，他对证明没有多大兴趣，他的兴趣在于赶快用这种数学方法去推算他的《大衍历》。张遂的插值法没有余项 $R_2(x)$，其实那时并无导数的概念。

张遂禀赋耿直，不趋炎附势，不畏惧权贵，脱俗专志，他的这些

数学家的必要品格，是当今每一位有志科学事业的同志应当效法的。

2）秦九韶与大衍求一术

秦九韶（Qin Jiushou，1202—1261），南宋人，出生于四川安岳，曾任潼川（四川三台）郡守，又在安徽、湖北、江苏等地做官，秦九韶性情乖戾，为人谲诈，为官贪暴，参与派系之争失败后，晚年贬至梅州（广东梅县），不久郁闷而亡。

他知识渊博，“性极机巧，星象、韵律、算术以至营造等事无不精究。”秦九韶的代表作是《数书九章》，全书分为9章，每章9题。

秦九韶的主要成就是一次同余方程与高次方程的解法，提出举世闻名的“大衍求一术”，即现在所称的“中国剩余定理”。

美国科学史家萨顿称秦九韶“是他那个民族，他那个时代乃至所有时代最伟大的数学家之一。”秦的治学态度非常投人，非常刻苦，而且把自己的全部成果无私地奉献给世人，令人钦佩之至！他自称“数理精微，不易窥识，穷年致志，感于梦寐、幸而得知，谨不敢隐。”当然，人无完人，美德者未必有才，有才者未必德高，秦九韶身上也有一些毛病是后人不宜效法的，例如我国数学史家钱宝琮1966年指出“秦九韶喜奢好大，嗜进谋身，私人品质也极恶劣。”西方科学史家李约瑟则说“秦九韶具有迷人的性格。”这真是仁者见仁，智者见智。

秦九韶对数学的认识带有很深的封建社会的烙印，重计算，求应用，这当然是正确的，但也有浓厚的神秘化甚至迷信的色彩，例如他在《数书九章序》中说“周教六艺，数实成之”，“大则可以通神明，顺性命，小则可以经世务，类万物”，颇有些“万物皆数”的观点，无限夸大了数学的作用。事实上，“神明”是什么，数学怎么去“通神明顺性命”呢？他又把“洛书”、“河图”说得神乎其神，他说“爰自河图洛书，闿发秘奥，八卦九畴，错综精微”，“人事之变无不该，鬼神之情莫能隐”。河图、洛书虽有精妙之处，但也不是这么神秘莫测，例如“洛书”，不过是一个最简单的三阶幻方而已。

对待古代数学，最忌把原始简单的数学成果无限拔高、把它在

数学中的作用无限夸大乃至神秘化。

秦九韶在《数书九章》中把一些实际问题化成一元高次方程式来求实根，有的方程竟达 10 次，例如第八卷第 32 题“遥度圆城”问题：

“问有圆城不知周径，四门中开，北外三里有乔木，出南门便折东行 9 里，乃见木，欲知城周径各几何？”

用现代的语言来说，秦九韶设城的直径是 x^2，他建立的方程为

$$x^{10}+15x^8+72x^6-864x^4-11664x-34992=0$$

解得城的直径为 $x^2=9$ 里，取 $\pi=3$，城周长 $3x^2=27$ 里。

该书第五卷第 19 题“尖田求积”问题如下：

“问有尖田一段，其尖长不等，两大斜三十九步，两小斜二十五步，中广三十步，欲知其积几何？”

用现代的语言来讲，秦九韶设该田面积为 x，他建立的方程是

$$-x^4+763200x^2-40642560000=0$$

解得 $x=840$。

由上述两例可见秦九韶解高次方程的技术是何等的高明！

应当说明的是，上述两例秦九韶的数学模型过于繁琐了，事实上在“尖田求积”中，不必建立方程，见图 1.38，用勾股定理可以求得上下两个等腰三角形的高 h_1 与 h_2，又已知两三角形的底（中

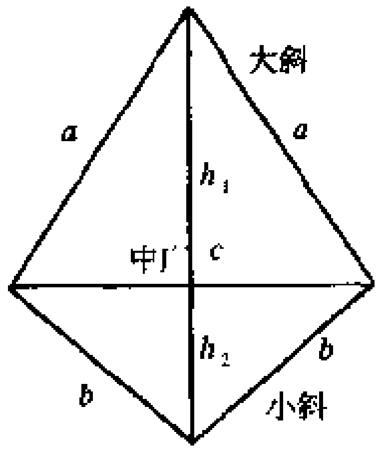


图 1.38

广)，所以此田面积为 $\frac{1}{2}(h_1+h_2)c$，c 是中广，$c=30$。$h_1=\sqrt{a^2-\frac{c^2}{2}}$，$h_2=\sqrt{b^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}$，$a=39$，$b=25$。

在"遥度圆城"一题中(见图 1.39)，若设城半径为 x，则由 $\triangle AOD\backsim\triangle ABC$ 得

$$\frac{a+x}{x}=\frac{b+AD}{b},AD=\sqrt{(a+x)^2-x^2}$$

$$\frac{a}{x}+1=1+\frac{1}{b}\sqrt{(a+x)^2-x^2}$$

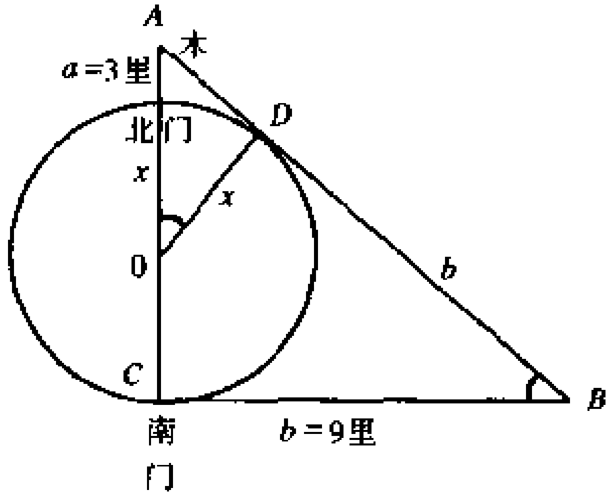


图 1.39

两边平方得

$$\frac{a^2}{x^2}=\frac{1}{b^2}[(a+x)^2-x^2]=\frac{1}{b^2}(a^2+2ax)$$

$$a^2b^2=x^2(a^2+2ax)$$

$$2x^3+ax^2-ab^2=0$$

只须解一个三次方程。

秦九韶还建立了一个用三角形三边长求三角形面积的公式；《数书九章》第五卷第 20 题"三斜求积"问题如下：

"问沙田一段，有三斜，其小斜一十三里，中斜一十四里，大斜一十五里，里法 300 步，欲知为田几何？"

[注解]小斜、中斜、大斜即三角形的三条边之长，"里法三百

步”指每里 300 步，每步 5 尺。秦九韶用勾股定理得出三角形面积公式

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{c^2a^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}\right)^2} \qquad (1.23)$$

其中 a, b, c 分别是大、中、小边。

公式(1.23)与古希腊海伦(Heron，约公元 50 年)在《测量仪器》一书中给出的公式(现称海伦公式)

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

是等价的。事实上，秦九韶公式中的被开方数可以改写成 $s(s-a)(s-b)(s-c)$：

$$\frac{1}{4}\left[c^2a^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)^2\right] =$$

$$\frac{1}{16}[(4a^2c^2 - (a^2+c^2-b^2)^2] =$$

$$\frac{1}{16}(2ac - a^2 - c^2 + b^2)(2ac + a^2 + c^2 - b^2) =$$

$$\frac{1}{16}[b^2 - (a-c)^2][(a+c)^2 - b^2] =$$

$$\frac{1}{16}(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+c+b) =$$

$$\frac{1}{8}s(a+b+c-2a)(a+b+c-2c)(a+b+c-2b) =$$

$$s(s-a)(s-b)(s-c)$$

于是得

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{c^2a^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)^2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

中国剩余定理源于《孙子算经》，此书作者与年代不详，大约成书于公元零年前后，《孙子算经》卷下第 26 题曰：“今有物不知其数，三三数之余二，五五数之余三，七七数之余二，问物几何？”“答曰：二十三”。“术曰：三三数之余二，置一百四十；五五数之余三，置六十三；七七数之余二，置三十；并之，得二百三十三，以二百一

十减之即得；凡三三数之余一，则置七十；五五数之余一，则置二十一；七七数之余一，则置十五；一百零五减之，即得。”

“置”即乘，指与余数相乘。

宋代人把上述算法编成口诀歌谣：

三岁孩儿七十稀，
五留廿一事尤奇，
七度上元重相会，
寒食清明便得知。

上元指元宵节（正月十五），寒食即冬至，冬至到清明 105 天。

明代程大位把口诀歌谣改写得更为妇孺皆知：

三人同行七十稀，
五树梅花廿一枝，
七子团圆正月半，
除百零五便得知。

具体运算过程是：

(1)$2\times70=140$；(2)$3\times21=63$；(3)$2\times15=30$，

(1)+(2)+(3)$=140+63+30=233$，

$233-105=128$，$128-105=23$。

23 即为所求（的最小数）。

汉朝大将军韩信，骄勇如项羽而机智似诸葛，用兵作战，为后世军界之样板。一次，他令副将去清点战士总数，信问曰：“三三数之，余几？五五数之余几？七七数之余几？”得知这 3 个余数，韩信即刻算出士兵的最少数目，并嘱咐说，如果不够用，可以再添上 105 人。于是在民间流传“韩信点兵，多多益善，心中有数，多而不乱”的佳话。

“物不知数”一题用现代符号来写，即求下列一次同余方程组的解

$$\begin{cases} x\equiv 2 \pmod 3 \\ x\equiv 3 \pmod 5 \\ x\equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$$

一般地,是求解一次同余方程

$$\begin{cases} x \equiv r_1 (\bmod 3) \\ x \equiv r_2 (\bmod 5) \\ x \equiv r_3 (\bmod 7) \end{cases}$$

解为

$$x = 70r_1 + 21r_2 + 15r_3 - 105k,\ k \in \mathrm{II}$$

这就是名冠中外的"孙子定理"。

秦九韶把上述问题推而广之,给出了一般的一次同余方程组的解法,即著名的"大衍求一术"或称"中国剩余定理",但秦九韶并未给出他的算法正确性的证明。

1743 年欧拉和 1801 年高斯分别独立地得出与秦九韶的"大衍求一术"相同的算法,且对模数互素的情形给出证明。

下面用现代写法给出"中国剩余定理"及其证明。

中国剩余定理 设 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 是 k 个两两互素的正整数,令 $m = \prod_{j=1}^{k} m_j = m_i M_i,\ i = 1, 2, \cdots, k$,则同余方程组

$$x \equiv b_i (\bmod m_i) \quad i = 1, 2, \cdots, k \tag{1.24}$$

的解为

$$x \equiv \sum_{i=1}^{k} M_i' M_i b_i (\bmod m) \tag{1.25}$$

其中 $M_i' M_i \equiv 1 (\bmod m_i),\ i = 1, 2, \cdots, k$。

证 由 $(m_i, m_j) = 1,\ i \neq j$(即 m_i, m_j 互素),则得 $(M_i, m_i) = 1$,进而对每个 M_i,存在一个 M_i',使得

$$M_i' M_i \equiv 1 (\bmod m_i)$$

另一方面,$m = m_i M_i$,故 $m_j \mid M_i,\ i \neq j$,所以

$$\sum_{j=1}^{k} M_j' M_j b_j \equiv M_i' M_i b_i \equiv b_i (\bmod m_i)$$

是式(1.24)的解。

若 x_1 与 x_2 皆式(1.24)的解,则

$$x_1 \equiv x_2 (\bmod m_i) \quad i = 1, 2, \cdots, k$$

因为$(m_i, m_j)=1$，于是 $x_1 \equiv x_2 \pmod{m}$，可见式(1.24)只有形如式(1.25)的解，证毕。

秦九韶把 M'_i 称为乘率，M_i 称为衍数。

求乘率 M'_i 即解方程 $M_i y_i \equiv 1 \pmod{m_i}$，它与不定方程

$$M_i y_i - m_i z_i = 1$$

同解，其中 M_i 与 m_i 是已知正整数。

秦九韶著《数书九章》卷二第 9 题曰：

"问有米铺，诉被盗去米一般三箩，皆适满，不记细数。今左壁箩剩一合，中间箩剩一升四合，右壁箩剩一合。后获贼，系甲乙丙三名。甲称当夜摸得马杓，在左壁箩，满舀入布袋；乙称踢着木履，在中箩，舀入袋；丙称摸得漆碗，在右边箩，舀入袋。将归食用，日久不知数。索得三器，马杓满容一升九合，木履容一升七合，漆碗容一升二合。欲知所失米数，计赃结断三盗各几何？

若以"合"为单位，则甲的马杓满容为 $m_1 = 19$，乙的木履满容为 $m_2 = 17$，丙的漆碗满容为 $m_3 = 12$。设 x 为被盗前每箩的米数，则被盗后，右箩剩米为 $b_1 = 1$，中箩剩米 $b_2 = 14$，右箩剩米 $b_3 = 1$，于是得一次同余方程组

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{19} \\ x \equiv 14 \pmod{17} \\ x \equiv 1 \pmod{12} \end{cases} \tag{1.26}$$

$m = m_1 m_2 m_3 = 19 \times 17 \times 12 = 3876$；$M_1 = m_2 m_3 = 204$，$M_2 = m_1 m_3 = 228$，$M_3 = m_1 m_2 = 323$。

解不定方程组

$$M_1 y_1 - m_1 z_1 = 1, y_1 = M'_1 = 15$$

$$M_2 y_2 - m_2 z_2 = 1, y_2 = M'_2 = 5$$

$$M_3 y_3 - m_3 z_3 = 1, y_3 = M'_3 = 11$$

方程组(1.26)的解为

$$x \equiv \sum_{i=1}^{3} M_i M'_i b_i \pmod{m} \equiv$$

$(204 \times 15 \times 1 + 228 \times 5 \times 14 + 323 \times 11 \times 1)(\text{mod } 3876) \equiv$

$(3060 + 15960 + 3553)(\text{mod } 3876) \equiv$

$22573(\text{mod } 3876) \equiv$

$3193(\text{mod } 3876)$

于是知盗前每箩有米 3193 合，甲盗走 3193 - 1 = 3192 合，乙盗走 3193 - 14 = 3179 合，丙盗走 3193 - 1 = 3192 合，共盗走米 9563 合。

《数书九章》中引人入胜地用"大衍求一术"解答的实际问题非常之多，今再录其 3 题，与读者共尝之，我们只给适当注解。

(1)问有上农三人，力田所收之米，系用足斗均分，各往他处出粜，甲粜与本郡官场，余三斗二升；乙粜与安吉乡民，余七斗；丙粜与平江揽户，余三斗。欲知共米及三人所分各粜石数几何？

[注解]当时人所共知官斛八斗三升，安吉乡斛一石一斗，平江市斛一石三斗五升，即 $m_1 = 83$(升)，$m_2 = 110$，$m_3 = 135$；$b_1 = 32$，$b_2 = 70$，$b_3 = 30$。求 x，x 满足方程组

$$\begin{cases} x \equiv 32(\text{mod } 83) \\ x \equiv 70(\text{mod } 110) \\ x \equiv 30(\text{mod } 135) \end{cases}$$

(2)问军师获捷，当早点差急足三名，往都下节节走报，其甲于前数日申末到，乙后数日未正到，丙于今日辰末到。据供甲日行三百里，乙日行二百四十里，丙日行一百八十里，问自军前至都里数，及三人各行日数几何？

[注解]设军前到都城为 x 里，甲速 $m_1 = 300$、乙速 $m_2 = 240$，丙速 $m_3 = 180$。

从 6 点到 18 点为白天，即从卯时开始到申末止。

[卯，辰，巳，午，未，申][酉，戌，亥，子，丑，寅]。

[6 点，……，18 点][18 点，……，6 点]。

"当早"指早晨 6 点，白天开始时。

甲申末到，说明甲走了几个白天。

乙未正到，说明乙走了若干天又走了从卯时起到未时正中为 4.5 个"时辰"(每个时辰两个小时)。

丙辰末到,说明丙走了若干天加上两个时辰。

于是 $b_1=0, b_2=\frac{4.5\times 240}{6}, b_3=\frac{2\times 180}{6}$(白天6个时辰)。问题变成解同余方程

$$\begin{cases} x\equiv 0 \pmod{300} \\ x\equiv 180 \pmod{240} \\ x\equiv 60 \pmod{180} \end{cases}$$

(3)问有急足三名,甲日行三百里,乙日行二百五十里,丙日行二百里,先差丙往他处下文字,既两日,又有文字遣乙追付,已半日,复有文字续令甲赶付乙。三人偶不相及,乃同时俱至彼所,先欲知乙果及丙甲果及乙得日并里,次欲知彼处去此里数各几何?

[注解]甲速 $m_1=300$,乙速 $m_2=250$,丙速 $m_3=200$。

乙追及丙的日数 $=\frac{2m_3}{m_2-m_3}=8$ 天。

甲追及乙的日数 $=\frac{\frac{1}{2}m_2}{m_1-m_2}=2\frac{1}{2}$ 天。

"同时俱至彼所",指每人皆在他出发的"时辰"到达"彼所"(目的地)。

又因甲、乙、丙皆行整天数,即 $b_1=b_2=b_3=0$。

设"彼处去此"里数为 x,则 x 满足方程组

$$\begin{cases} x\equiv 0 \pmod{300} \\ x\equiv 0 \pmod{250} \\ x\equiv 0 \pmod{200} \end{cases}$$

300,250,200的最小公倍数为3000,即 $x=3000$ 里。

《数书九章》原书名为《数术大略》,后被人改名为《数学大略》,明代改称《数书九章》,此书问世于1247年,它综合了前此中国古代各数学经典中的精华内容,而且载有秦九韶的独创成果(例如大衍求一术和高次方程求正实根的方法),被中算史家誉为"算中宝典"。

该书是一部应用数学专著,它与《九章算术》有相似的文风,即注重解法与运算技巧,寓理于算。

3）杨辉三角

杨辉，南宋时代的著名数学家，生活于13世纪中下叶，杭州人，生平不详。著有数学专著5部，与秦九韶、李冶、朱世杰合称宋元四大家。杨辉最令人难忘的贡献是所谓“杨辉三角”。

杨辉在1261年写成名著《详解九章算术》，其中他绘制了如下的一张图（见图1.40），此图即为杨辉三角，杨辉声明此图在贾宪的作品《释锁算书》中已经用过，《释锁算书》已失传，此事已不可考。

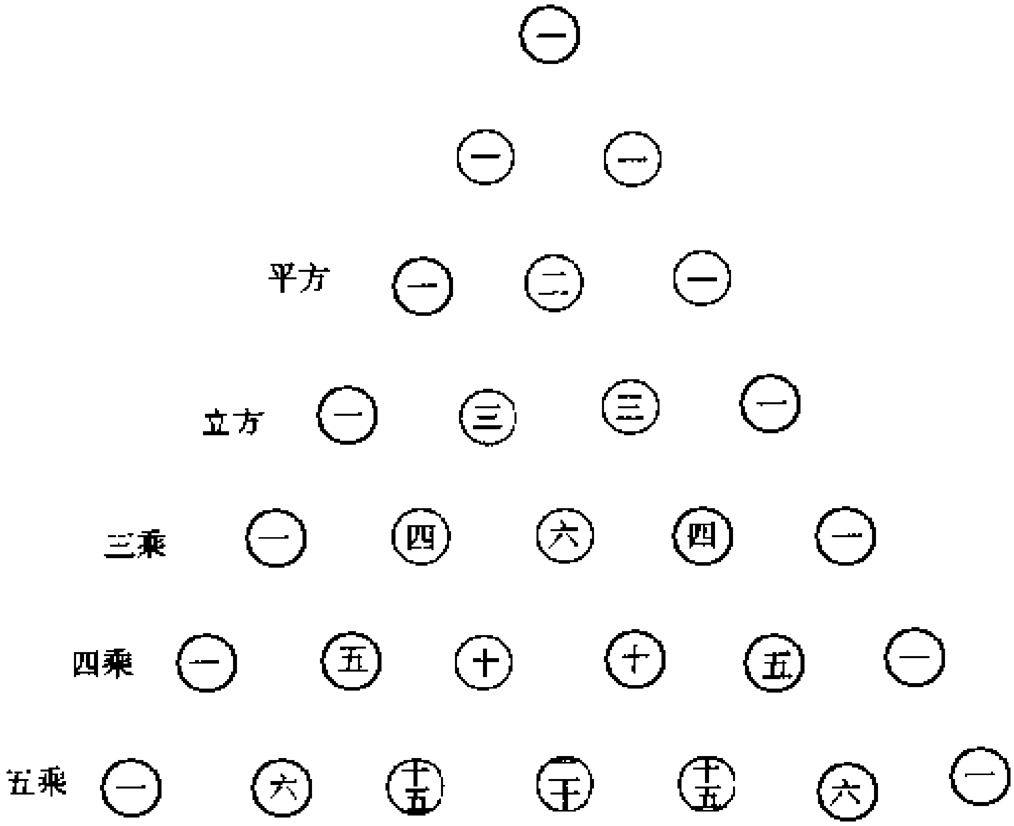


图1.40

杨辉三角可以向下延拓出无穷多层，它有许多精美的性质：

（1）第 n 层是 $1, C_{n-1}^{1}, C_{n-1}^{2}, \cdots, C_{n-1}^{r-1}, C_{n-1}^{r}, \cdots, C_{n-1}^{n-2}, 1$。

（2）首先构作一个正三角形（见图1.41）

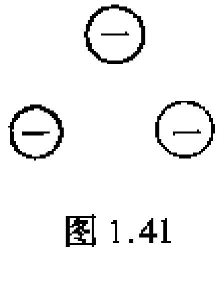


图1.41

下面各层可以如下抄出：开头结尾是 1，其余元素由左上方与右上方两元相加而得（见图 1.42）：

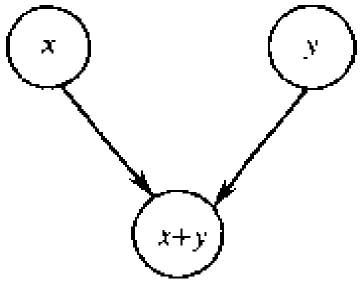


图 1.42

(3)第 n 行是 $(a+b)^{n-1}$ 的展开式的系数。

(4)第 $n+1$ 行的和是 2^n。

(5)$u(x)v(x)$ 的 n 阶导数各项的系数是杨辉三角的第 $n+1$ 行。

(6)由杨辉三角可知

$$C_{n-1}^{r-1}+C_{n-1}^{r}=C_n^r \quad (r=1,2,\cdots,n)$$

(7)1956 年华罗庚教授在《从杨辉三角谈起》一文中对杨辉三角的概率意义作了精彩的论述。

在一块倾斜的木板上，贴上一些全等的正六边形木块，最下层是一些长方形的匣子，相邻两块正六边形木块的公共边留一条小沟，可以使从上方滚下的小珠子通过，见图 1.43。

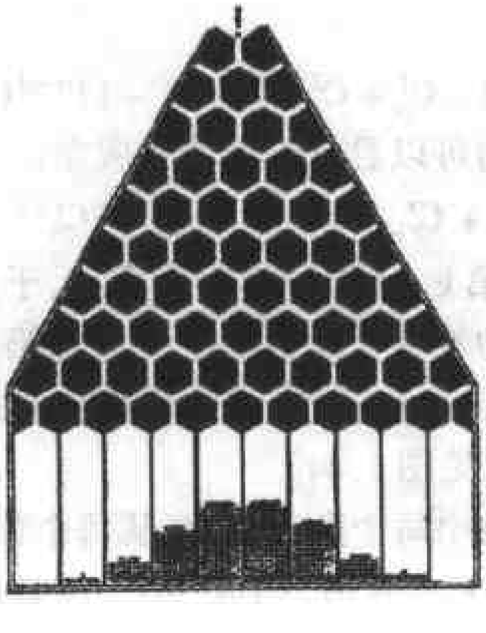


图 1.43

小珠子从顶上漏斗中通过中间小沟落到第二层木块的顶点，之后或左或右地等可能性地滚入第二层中间那块小木块的两个竖直通道之一，接着它落入下一层三个竖直通道之一，这时，若珠子落入3个通道最左的通道，它一定是从上层最左通道来的；若它落入最右通道，它一定是从上层最右通道来的；若它落入中间通道，它可以从上层左边通道来也可能是从上层右边通道来的，有两种可能。

即珠子落入第二层两个通道可能性大小之比是1:1，落入第三层3个通道的可能性大小之比是1:2:1，依此类推，可知珠子落入第四层4个通道的可能性之比是1:3:3:1，…，珠子落入第 $n+1$ 层各通道的可能性之比为

$$1:C_n^1:C_n^2:\cdots:C_n^{n-1}:1$$

从上述论述可知，杨辉三角每层上写的数字恰为一只珠子从上述装置的顶上落下时通过该层各竖直通道可能性之比，或曰通过各通道的概率之比。

如果在顶端漏斗中放下 $1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}+1=2^n$ 个珠子，掉入底部 $n+1$ 个匣子里的珠子数目从左到右（按可能性来计算）正好是杨辉三角第 $n+1$ 行。若把匣子从左到右编号，则落入奇数号匣子中的珠子总数与落入偶数号匣子的珠子总数一样多，事实上，这是由于

$$0=(1-1)^n=1-C_n^1+C_n^2-\cdots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}+(-1)^n$$

(8)由杨辉三角可以看出下面公式成立：

$$C_r^r+C_{r+1}^r+C_{r+2}^r+\cdots+C_{n-1}^r=C_n^{r+1}\quad(n>r)\qquad(1.27)$$

事实上，C_k^r 是第 $k+1$ 层的第 r 个数字，于是 $C_r^r,C_{r+1}^r,\cdots,C_{n-1}^r$ 是从 $r+1$ 行最右的数字1开始向左下方到第 n 行的那一斜行的各个数字，由性质(2)，这些数字之和为第 $n+1$ 行第 $r+1$ 个数字，所以有公式(1.27)，见图1.44。

(9)以杨辉三角中每个数为顶点，从每个顶点向它的下层最接近的两个顶点画两条有向边，构成一个“杨辉图”（见图1.45），则每个顶上的杨辉数码恰为从根到此顶点有向轨的条数。

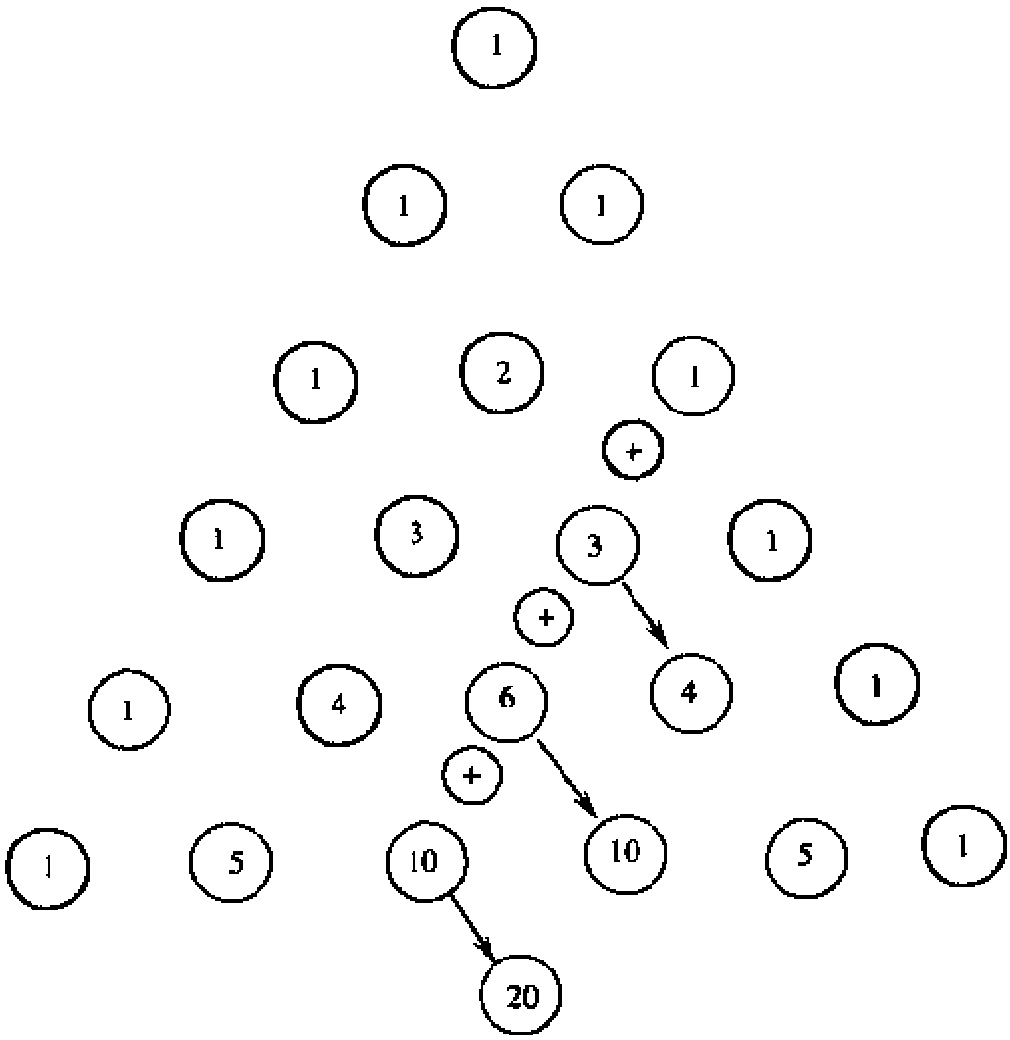


图 1.44

(10)把杨辉三角每个杨辉数取倒数,且第 n 层分母皆乘以 n,则得莱布尼兹三角,见图 1.46。

莱布尼兹(Leibniz,1646—1716)是德国著名数学家,他对数学有大贡献,后面要介绍他。

西方把杨辉三角称为帕斯卡三角,事实上帕斯卡(Pascal,1623—1662)是 1654 年发现这种三角的,比杨辉晚 400 来年。西方第一个发现这一"三角"的是德国人阿比纳斯(Apianus),也比杨辉晚得多。

帕斯卡是法国著名数学家,1623 年生于法国克莱蒙费朗,其父也是法国数学家,帕斯卡 3 岁丧母,其父为了孩子们的成长拒绝再娶,把小帕斯卡带到巴黎居住,亲自教育儿子,使帕斯卡的聪明

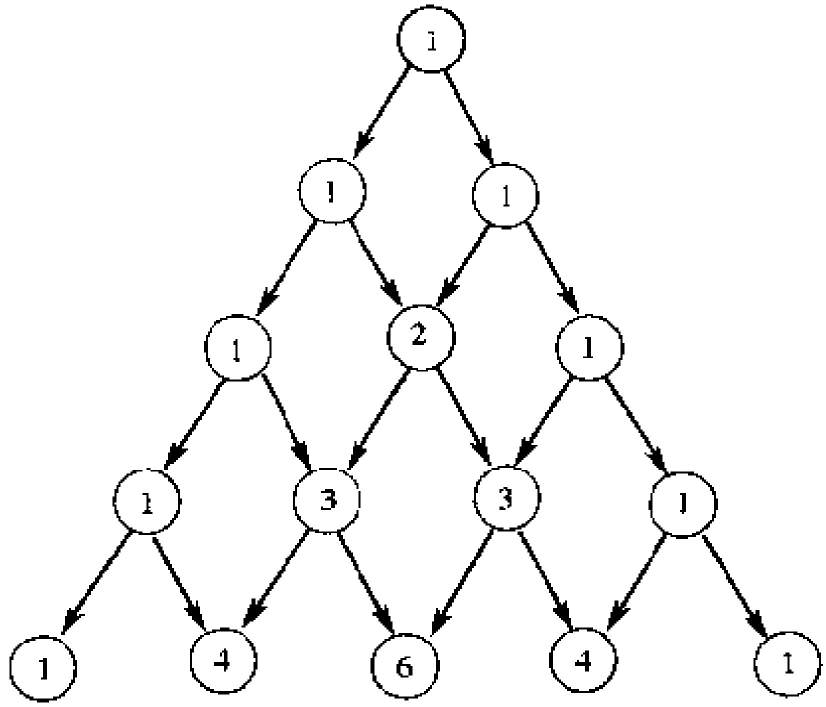


图 1.45

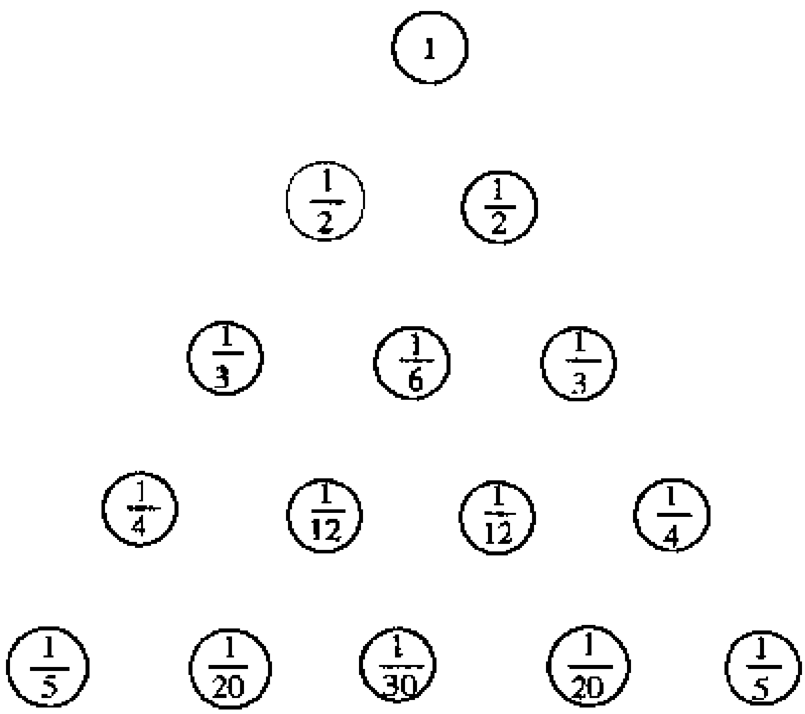


图 1.46

才智得到充分的成长与发挥，终于成长为17世纪最卓越的数学家与物理学家之一。

帕斯卡16岁时写出一本关于圆锥曲线的著作，莱布尼兹看过此书，可惜此书已经失传。1640年，帕斯卡发表论文《略论圆锥曲线》，梅森把这篇论文寄给笛卡儿看，笛卡儿竟不敢相信这么重大的成果竟出自一个20多岁的青年之手，这篇文章是自希腊阿波罗尼奥斯之后关于圆锥曲线的最重要的成果。数学史家认为，单凭这一篇论文，帕斯卡即可以名扬四海。在这篇文章中，帕斯卡证明了下面的定理(现称帕斯卡定理)：

圆锥曲线的内接六边形的三组对边之交点共线。

1653年，帕斯卡与骑士梅累等人结交，梅累嗜好赌博，他向帕斯卡提出了一个掷骰子的问题：两个玩骰子的人各出赌注32金币，约定甲先掷出三次六点或乙先掷出三次四点，就算赢了对方，甲已掷出两次六点，乙已掷出一次四点，赌博因故中断，问甲乙应如何分64金币的赌本？1654年帕斯卡与费马通信，两人都得出正确结果。帕斯卡是概率论的创始人之一。

1640年，为了减轻父亲的繁重计算，帕斯卡用两年时间制造了世界上第一台六位数手摇计算机，此计算机至今仍保存在巴黎国立工艺博物馆。

帕斯卡还为微积分概念的建立进行过前期准备工作，例如他曾推导出

$$\int_0^a x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}a^{n+1}$$

1655年，帕斯卡的《三角阵算术》出版，此文于1653年写成。他如下构作了一个无穷矩阵，第一行的元素皆1，第一列的元素皆1，如果用a_{ij}记第i行第j列的元素，则$a_{ij}=a_{i-1,j}+a_{i,j-1}$。$i,j\geqslant 2$，见图1.47。

这个三角阵从左上角切下的一个等腰三角形恰为“杨辉三角”，当然帕斯卡是独立于杨辉发现这一无穷阵的。

帕斯卡在讨论三角阵的时候应用了数学归纳法，他是数学上

1	1	1	1	1	1 …
1	2	3	4	5	6 …
1	3	6	10	15	21 …
1	4	10	20	35	56 …
1	5	15	35	70	126 …
1	6	21	56	126	252 …

图 1.47

创立且使用数学归纳法的第一人。

帕斯卡推导出三角阵的性质有：

(1)三角阵的任给一元素减去 1，等于这一行上面包括给定元素的列的左边的所有元素之和。

(2) $a_{n,m}=\dfrac{(m+n-2)!}{(m-1)!\ (n-1)!}$。 $(0!\ =1)$

(3) $a_{m,n}=a_{n,m}$，即此三角阵关于主对角线对称。

(4)任一向左下行的对角线上的元素和是上一条向左下行的对角线上元素和的 2 倍。

(5)第 $n+1$ 条向左下行的对角线上元素和为 2^n。

(6)第 $n+1$ 条向左下的对角线与第 $r+1$ 列交点的元素为 C_n^r。

帕斯卡还研究了旋轮线，求得了与旋轮线底线平行的直线与旋轮线围成的面积与重心，以及这种图形绕这条平行直线旋转所得的旋转体的体积，这些工作都成了牛顿与莱布尼兹微积分的先导工作之一。1657 年—1658 年，帕斯卡写出《摆线通论》、《摆线通论续》和《摆线通论再续》3 篇重要文献，他的其他重要文章还有《数学幂大全》、《论算术三角形》、《组合的应用》、《概率论的应用》、

《二项式的应用》和《几何学精神》等。

帕斯卡是有名的散文家，他的散文集《思想录》、《致外省人的信札》等是思想文化史上的古典名著，思想深邃，文笔隽丽，对后世影响深远。

帕斯卡英年早逝，他在数学与物理学上的巨大贡献是给全人类留下的不朽遗产。

帕斯卡的名言是：

追求真理时，发现真理；

已知真理时，论证真理；

探讨真理时，鉴别真理。

帕斯卡是数学史上的奇才和功臣。

我国杨辉与帕斯卡一样是一位光彩照人的世界级数学家，他才思奇特，文笔流畅生动，主要著作有：

(1)《详解九章算术》，1261 年。

(2)《日用算法》，1262 年。

(3)《乘除通变本末》，1274 年。

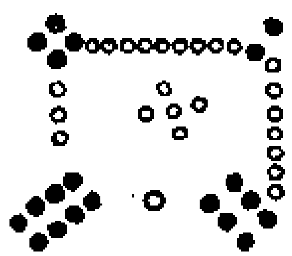
(4)《田亩比类乘除捷法》，1275 年。

(5)《续古摘奇算法》，1275 年。

杨辉对我国珍宝级数学遗产"洛书"和"河图"进行了深入研究，定义了"纵横图"(即幻方)概念，他研究了从 3 阶到 10 阶的幻方构作问题。

公元前 2200 年，《易经》载有图 1.48 和图 1.49 所示的两张图。

相传大禹治伏水患之后，洛河中一神龟浮出水面，把图 1.48



$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

图 1.48　洛书

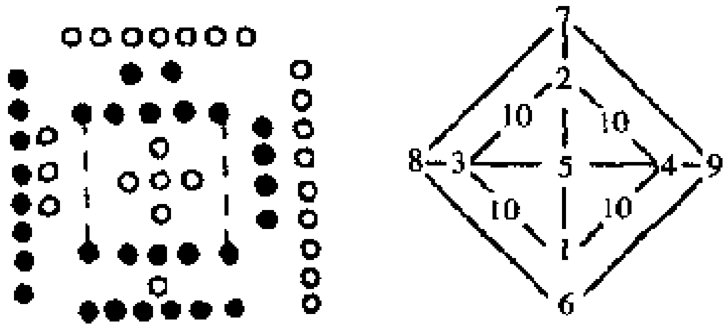


图 1.49　河图

所示的所谓"洛书"奖与大禹；黄河水面则跃起一匹白龙马，把图 1.49 所示的所谓"河图"献给大禹，以表彰大禹为民除害之功。神龟与白龙马的神话当属无稽之谈，但图 1.48 与图 1.49 中的数学含义却是十分宝贵的。

把洛书化成方阵，恰为 1～9 几个数字组成的幻方，每行之和与每列之和皆为 15；而河图中外围 4 个等腰梯形皆有上底与下底相等的性质，例如右上梯形 $2+10+4=7+9=16$；另外，从中心的 5 算起，向上：$5+2=7$；向下：$5+1=6$；向左：$5+3=8$；向右：$5+4=9$，等，有许多有趣的数学性质。

4）李冶与天元术

李冶（Li Ye，1192—1279），原名李治，字仁卿，号敬斋，河北省栾城县人，1230 年赴洛阳应试，考中金朝进士，调任钧州（河南南禹县）知事。1232 年，蒙古军攻破钧州城。李冶败走山西，隐居山西崞山，虽"饥寒不能自存"，仍潜心研究数学。1251 年，移居河北封龙山聚徒授课，山上有封龙书院，藏书颇丰，众多文人隐士，出没其间，坐而论道，之中不乏懂数学者，李冶与之切磋学术，交流观点，李冶自称"龙山老人"。1248 年，李冶写成名著《测圆海镜》，这是一部享誉世界的数学文献。1251 年，李的第二部数学专著《益古演段》问世。这正应了"隐身免留千载笑，成书还待十年闲"的名言，李冶隐居 20 余年，写成了两部不朽之作。

元朝建国后，元世祖忽必烈多次聘请李冶出山，许以高官厚禄，李以老病推托，"宁与市人木石为伍"，不愿为帝王效力。

忽必烈曾请教李冶说："天下当如何而治？"李答曰："夫治天下，难则难于登天，易则易于反掌。盖有法度则治，控名责实则治，进君子退小人则治，如是而治天下，岂不易于反掌乎？无法度则乱，有名无实则乱，进小人退君子则乱，如是而治天下，岂不难于登天乎？"

李冶不仅是一位天才数学家，而且是一位颇有钧见的政治家。李冶见忽必烈如此求贤若渴，问及治天下事，于是于 1265 年到北京翰林院工作。岂略翰林院思想禁锢，事事处处要秉承皇帝御旨，不能有半点言论自由，李冶徒有铁笔亦难肩道义，干了仅一年的朝庭命官，便愤然托病辞官归隐。元代文人耶律铸写过一道《送李敬斋行》的诗，送别李冶归去：

一代文章老，李车归故山。
露浓山月净，荷老野塘寒。
茅屋已知足，布衣甘分闲。
世人学不得，须信古今难。

李冶辞官之后不再出山，一直研究数学和从事教学工作，寿至 87 岁而故，后人盖棺定论曰："讲学著书，秘演算术，独能以道德文章，确然自守，至老不衰。"

李冶精通六艺百家，文史类文章亦为所长，但他对数学则情有独钟，去世前对儿李克修口吐遗嘱曰："吾平生著述，死后可尽燔去，独《测圆海镜》一书，虽九九小数，吾常精思致力焉，后世必有知者，庶可布广垂永乎？"

历史证明，李冶及其名著《测圆海镜》确实永垂不朽，后世"知音者"大有人在，例如清代数学家梅瑴成(1681—1763)学习了李冶的著作，把李书中的天元术编成名著《赤水遗珍》，使李冶的天元术发扬光大之。

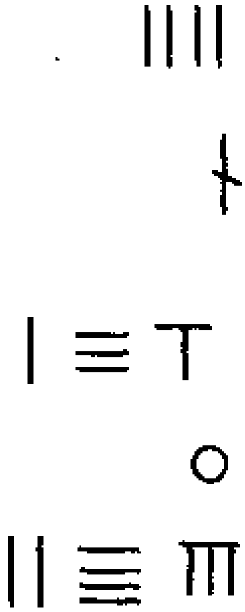
《测圆海镜》全书 12 卷，讨论"勾股容圆"问题，即直角三角形内切圆等有关问题。

李冶在《测圆海镜》中把未知数叫做天元，对实际问题所求的未知数记为天元，再把实际问题化成代数方程且求出未知数的技术称为"天元术"；后人称"代数即天元"。

在李冶之前也有天元术，对于常数项用“人”表示，未知数一次至九次项系数旁则分别用“天”、“上”、“高”、“层”、“垒”、“汉”、“霄”、“明”、“仙”来表示 $x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, x^8, x^9$。用“地”、“下”、“低”、“减”、“落”、“逝”、“泉”、“暗”、“鬼”分别表示 $x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, x^{-4}, x^{-5}, x^{-6}, x^{-7}, x^{-8}$和 x^{-9}。李冶加以改造，把这种“文词代数"改成“符号代数”，用“等式”表达。例如

$$4.12x^2 - x + 136 - 248x^{-2} = 0$$

李冶用等式表示成



16 世纪后半叶法国数学家韦达引入拉丁字母代表方程中的未知数，比李冶的天元术晚了 300 年左右。

用现在的记法，李冶从几何问题用天元术列出且解出的方程数以百计，下面写出他解过的 10 个高次方程：

(1) $-x^2 + 320x - 132800 + 13056000x^{-1} = 0$。

(2) $x^2 - 170x + 6000 = 0$。

(3) $-2x^2 - 560x + 384000 = 0$。

(4) $0.5x^2 - 820x + 230400 = 0$。

(5) $-0.4375x^4 + 766.5x^3 - 165963x^2 - 252393120x + 60989241600 = 0$。

(6) $-2x^6-714x^5-62165x^4-2220302x^3+82926810x^2+1725602816x+51336683776=0$。

(7) $-x^3+320x^2-132800x+13056000=0$。

(8) $63x^4-15792x^3+1336328x^2-46428480x+553190400=0$。

(9) $-4x^5+3600x^4-1256400x^3+105840000x^2=0$。

李冶把(9)降幂成

(9)′ $-4x^3+3600x^2-1256400x+105840000=0$。

(10) $-x^4+8640x^2+652320x+4665600=0$。

《益古演段》主要是用天元术研究平面图形的面积问题。例如书中第三十三题曰:“今有圆田一段,中心有直池水占之,外计地七千三百丈,只云并内池长阔少田径五十五步,阔不及长三十五步,问三事各多少?”

[**注解**]“三事”指池的长与阔和圆的直径。

设 x 丈为圆田直径,π 取成 3,则圆面积为 $\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{3}{4}x^2$,于是内池面积为

$$0.75x^2-7300$$

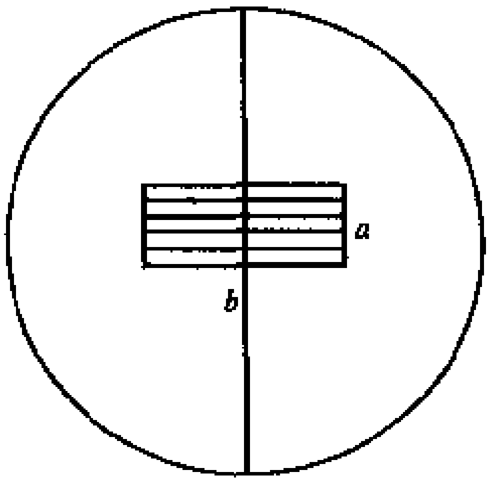


图 1.50

若池的长与阔为 b 与 a,则

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$$

而今 $a+b=x-55$, $a-b=35$,于是

$$(x-55)^2-35^2=4ab$$

即$(x-55)^2-35^2$是4个水池的面积,于是

$$(x-55)^2-35^2=4\left(\frac{3}{4}x^2-7300\right)$$

$$2x^2+110x-31000=0$$

解得 x 之后从

$$\begin{cases}a+b=x-55\\a-b=35\end{cases}$$

再求得 a 与 b。

美国数学史家萨顿(G. Sarton, 1884—1956)在其著作中称李冶是金元时代中国最伟大的数学家之一。直至今日,还有不少国家学习研究李冶的数学成果,例如巴黎大学的林力娜(K. Chemla)写出关于《测圆海镜》的博士论文,获得博士学位。

1992年,中国举行了"李冶"诞生800周年纪念会,在河北栾城建立了"李冶陈列馆"对外开放,李冶已公认为中国的文化名人。

5)朱世杰和他的《四元玉鉴》

朱世杰是中国古代数学全盛期最杰出的数学家之一,《四元玉鉴》是他的代表作,成书于1303年。

朱生活于13世纪末至14世纪初,元代人,生平不详,字汉卿,号松庭,河北省人,他以讲学为生,是个职业数学家。莫若为《四元玉鉴》作序曰:"燕山松庭朱先生以数学名家周游湖海二十余年矣。四方之来学者日众,先生遂发明九章之妙,以淑后学。为书三卷,分门二十有四,立问二百八十有八,名曰《四元玉鉴》。先生是书将大用于世,有能执此以往,则古人格物致知之学,治国平天下之道,其在是矣。"

朱世杰的另一名著是《算学启蒙》,这是一本综合性普及作品,问题与解法皆新奇有趣,引人入胜。赵元镇为《算学启蒙》作序曰:"燕山松庭朱君,笃学九章,旁通诸术,出意编撰算书三卷,分二十门,立二百五十九问,细草备辞,置图析体训为《算学启蒙》,贯通古今,发明后学。明天地之变通,演阴阳之消长,能穷未明之明,克尽

不解之解，索数隐微，莫过乎此，是书一出，为算法之标准，四方之学者归焉。”

下面从《算学启蒙》中摘录几题如下。

《算学启蒙》卷下“堆积还原门”第一问：

“今有茭草底每面五十四束，问积几何？”

[注解]“茭草”，喂牲口（牛马）的干草捆。底下一层 54 捆，向上每层少一捆，顶上只一捆，所以共计

$$1+2+3+\cdots+54=\frac{(1+54)\times 5}{2}=1485(\text{捆})$$

第四问：“今有三角垛果子，每面底子四十四个，问共积几何？”

[注解]三角垛果子，把一样大小的果子（例如苹果，西瓜等）堆成正三棱锥形的一垛，底面每边 44 只果子，顶上只一只果子，从上向下数，每层果子数为 $1,3,6,\cdots,\frac{1}{2}n(n+1)$，令 $n=44$，于是全垛共计果子数为

$$1+3+6+\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

令 $n=44$，得果子总数为

$$\frac{1}{6}44(44+1)(44+2)=29370(\text{个})$$

这些问题杨辉也研究过；朱世杰在《算学启蒙》中还研究了这类堆垛问题的反问题。

第八问：“今有茭草积一千四百八十五束，问底面几何？”

[注解]这是第一问的反问题。设底为 x 束，则

$$\frac{1}{2}x(x+1)=1485$$

第十四问：“今有三角、四角果于（垛）各一所，共积六百八十五个；只云三角底子一面不及四角底一面七个，问二色底子一面几何？”

[注解]“三角”指每层皆正三角形，“四角”指每层皆正方形，最

低层正方形比三角形边长大 7;设三角垛底层每边 x 个果子,则四角垛底边为 $x+7$ 个果子,于是三角垛共有果子

$$\frac{1}{6}x(x+1)(x+2)$$

四角垛共有果子

$$\frac{1}{6}(x+7)(x+8)(2x+15)$$

依题意得

$$\frac{1}{6}x(x+1)(x+2)+\frac{1}{6}(x+7)(x+8)(2x+15)=685$$

$$3x^3+48x^2+339x-3270=0$$

解得 $x=5$。

朱世杰在《四元玉鉴》中引入"天元"、"地元"、"人元"与"物元"这四元,即 4 个未知数 x,y,z,w。朱世杰把实际问题所求分别用四元表示,再通过消元,只留下天元(x)一元或其他元一元,即得一个高次方程,在朱研究的问题中,竟有一个,其物元方程为 14 次方程:

$$2006w^{14}-11112w^{13}+22292w^{12}-19168w^{11}+2030w^{10}+$$
$$12637w^9-8795w^8-8799w^7+19112w^6-9008w^5-384w^4+$$
$$1792w^3-640w^2-768w+1152=0$$

这是我国古代数学史上次数最高的方程,亦是同一时期世界数学史上次数最高的方程,朱世杰解得 $w=2$。

在《四元玉鉴》中朱还给出了如何把无理方程化成有理方程的方法。

在《四元玉鉴》中朱世杰继续研究垛积问题及其反问题,是《算学启蒙》中此类有趣问题的加难和推广,这种问题在《四元玉鉴》中共有三门三十四问,现摘录若干如下。

(1)"茭草形段"第二问:"今有茭草一千八百二十束,欲令撒星形堆之,问底子几何?"

[**注解**]所谓"撒星形堆",指堆成若干"三角垛",第一垛只一束,第二垛底为 2 束,…,第 n 垛底为 n 束,这些堆垛犹如 n 颗星

撒在天空。于是总束数为

$$S=1+(1+3)+(1+3+6)+\cdots+\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)=$$

$$\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

由题意得

$$\frac{1}{24}x(x+1)(x+2)(x+3)=1820$$

$$x^4+6x^3+11x^2+6x-43680=0$$

解得 $x=13$，即最大的一堆底层为 13 束，共 13 堆。

(2)"果垛叠藏"门第三问："今有四角落一形果子，积五百四十个，问底子几何？"

[注解]"四角落一形"是从上向下看，第一层一个果子，第二层 2×2 个果子排成的正方形，…，第 n 层是 $n\times n$ 个果子排成的正方形，如此垛成的"四角垛"组成"撒星"；即第一垛底层边长为 1，第二垛底层边长为 2，…，第 n 垛是底层长边为 n 的正方形的"四角垛"。于是此"四角落一形"撒星果子总数为

$$S=1+(1+4)+(1+4+9)+\cdots+(1+4+9+\cdots+n^2)=$$

$$\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

本题是求最大的一垛的底层边长，设所求为 x，则

$$\frac{1}{12}x(x+1)(x+2)(x+3)=540$$

$$x^4+4x^3+5x^4+2x-6480=0$$

解得 $x=8$。

"果垛叠藏"门第五问："今有四角岚峰形果子，积四百四十八个，问底子几何？"

[注解]"四角岚峰形"是如下构成的：造一个"四角落一形"撒星，再把第二垛变成相同的两垛(复制一垛)，把第三垛复制两垛变成三垛，依此类推，…，把第 n 垛复制 $n-1$ 垛变成 n 垛，如图 1.51 所示。

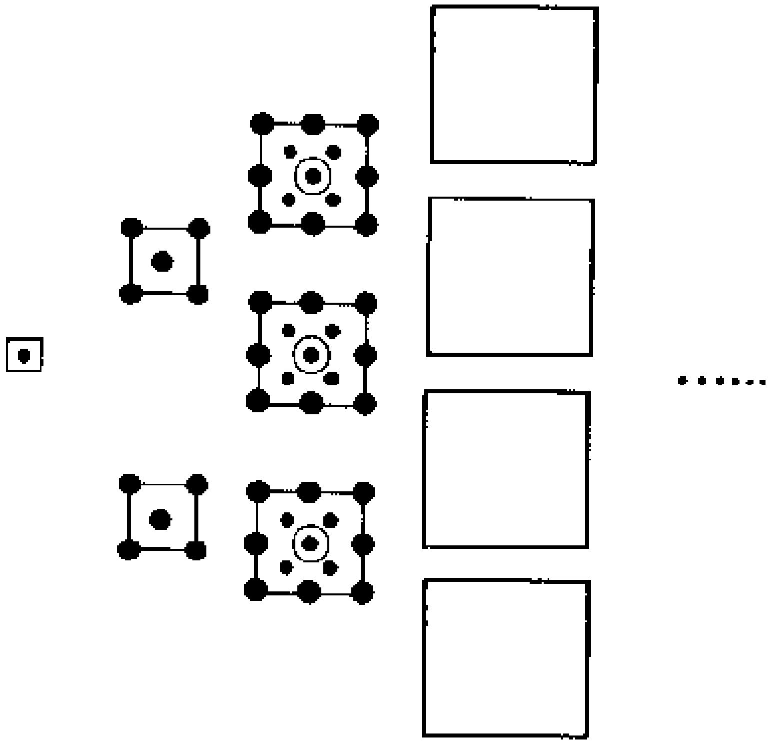


图 1.51

于是果子总数为

$$S = 1\times1+(1+4)\times2+(1+4+9)\times3+\cdots(1+4+9+\cdots n^2)\times n =$$

$$\frac{1}{60}n(n+1)(n+2)\left[n\left(4n+\frac{3}{2}\right)+\left(4n+\frac{1}{2}\right)\right]$$

设最大的一垛“底子”为 x 个果子，则得

$$\frac{1}{60}x(x+1)(x+2)\left[x\left(4x+\frac{3}{2}\right)+\left(4x+\frac{1}{2}\right)\right]=448$$

$$4x^5+17\frac{1}{2}x^4+25x^3+12\frac{1}{2}x^2+x-26880=0$$

解得 $x=5$。

“果垛叠藏”门第四问：“今有三角岚峰形果子，积六百三十个，问底子几何？”

[注解]设最大的一垛底边长 x(个)，则 x 满足方程

$$1\times1+(1+3)\times2+(1+3+6)\times3+\cdots+\left(1+3+6+\cdots+\frac{x(x+1)}{2}\right)x=630$$

即

$$\frac{1}{120}x(x+1)(x+2)(x+3)(4x+1)=630$$

$$4x^5+25x^4+50x^3+35x^2+6x-75600=0$$

解得 $x=5$。

朱世杰把几何、堆垛与天元有机结合,级数求和及其逆运算操作自如,列方程解方程天元有术,数理深奥,堆垛壮美,实乃数学中的极品。

朱世杰对高阶等差级数求和、高次内插、多元高次方程求解等,都有重要贡献,他还是正负数乘除法及珠算除法口诀的首创者,例如

二一添作五,三一三十一,
六一下加四等

朱是读出此种口诀的第一人。

所谓高阶等差级数是指

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots \tag{1.28}$$

$$b_1=a_2-a_1,b_2=a_3-a_2,b_3=a_4-a_3,\cdots \tag{1.29}$$

$$c_1=b_2-b_1,c_2=b_3-b_2,c_3=b_4-b_3,\cdots \tag{1.30}$$

若(1.30)是等差级数,则称式(1.28)是三阶等差级数;若式(1.29)是等差级数,则称式(1.28)是二阶等差级数。

一般而言,设 $r\in\mathbb{N}$,若一个级数的各项与其前一项之差构成的级数是$(r-1)$阶等差级数,则称原来那个级数为 r 阶等差级数。

朱世杰在堆垛问题中就研究了高阶等差级数,例如上面的"撒星垛"中,

$$1,1+3,1+3+6,\cdots,\frac{1}{6}n(n+1)(n+2),\cdots \tag{1.31}$$

式(1.31)就是三阶等差级数。

"四角落一"中

$$1,1+4,1+4+9,\cdots,(1+4+9+\cdots+n^2),\cdots \tag{1.32}$$

式(1.32)就是四阶等差级数。

一般地，

$$C_r^r + C_{r+1}^r + \cdots + C_{r+n-1}^r$$

是一个 r 阶等差级数的前 n 项和，此和为 C_{r+n}^{r+1}，此结论可由杨辉三角得到。

6　中国古代数学的衰落

前面扼要介绍了中国古代的数学成就，中国数学家在勾股定理、π 的近似值、一次同余方程组的解法和高次代数方程等方面，对世界数学有突出贡献，我们有 10 部算经，我们有刘徽、祖冲之、祖暅、僧一行、秦九韶、杨辉、李冶和朱世杰等世界级的大数学家，中国古代数学到朱世杰(14 世纪初)那一代，达到了世界数学的最高水平，有足够的史料证实，那时中国是世界上的第一数学强国。

令人遗憾的是，从 14 世纪开始，中国数学开始走下坡路，到了清朝前期，数学几乎成了中国文化教育界不被重视的冷门学科。明代有的数学家甚至弄不懂朱世杰书中的内容，明清两朝代的数学家大都干一些前人(刘、祖、祖、僧、秦、杨、李、朱)著作和 10 本算经的注释工作，或编些已有结论的数学歌谣，或搞些珠算技术，这种抱残守缺的状态一直延续到 19 世纪。而 16 世纪以来，欧洲数学异军突起，笛卡儿于 1637 年弄出个解析几何，牛顿(1661 年)与莱布尼兹(1684 年)发明了微积分，中国呢？

一个尖锐而重要的问题是：

中国传统数学为什么不能发展成近代数学？中国古代数学为什么会衰落？

为了回答这个问题，首先必须从中国古代数学的特点(或曰缺点)谈起。

(1)中国古代数学长于计算，注重程序；与此相应的负面是逻辑性较差，理论水平偏低。

例如中国古代数学的代表作《九章算术》，只有题目、“答曰”和“术曰”，而疏于言证。

(2)中国古代数学重应用,轻理论。

重应用当然好,轻理论则失之偏颇了。数学是一门理论性极强、讲究抽象与逻辑的文化性极高的独立的科学,并非"全在于应用"!

(3)中国古代数学的书写方式落后。

中国古汉语一直是竖行书写,表达数学计算极不方便,设想现在我们硬是要求数学论文必须竖写,那将是多么别扭难干的事。

另外,中国古代即使有一些数学符号,也很不够用,长期流行所谓"文词数学",例如"文词代数","文词几何",直到19世纪,清代数学家李善兰(1811—1882)翻译西方微积分时,仍然把

$$\int \frac{dx}{a+x} = \ln|a+x| + c \tag{1.33}$$

译成

$$禾\frac{甲\perp天}{亻天} = (甲\perp天)对\perp丙 \qquad (1.33)'$$

式(1.33)′中的"天"是积分变元 x(天元),"甲"表示 a,"丙"表示 c,"对"表示 ln,"禾"表示 $\int$,"亻"表示 d,"⊥"表示 +。

用诸如此类的笨拙符号表示现代数学,真是不可想象的事。

可以看出,中国传统的"文词数学"的习惯是如何地根深蒂固,既然是翻译,为什么不照抄

$$\int \frac{dx}{a+x} = \ln|a+x| + c$$

而硬是把式(1.33)处心积虑地写成式(1.33)′这种怪式子呢?

中国古代数学衰落的另一个重要因素则来自中国古代的传统思想文化和反动的封建专制制度。

(1)中国古代数学家深受孔孟之道、儒家思想之束缚,追求言简意赅之风度,主张"寓理于算",既然结果已经给出("答曰"),道理似乎已经不言而喻,不足道也。儒家提出"学有所止",宣扬作学问的中庸之道和不求甚解之作风。

事实上,数学是讲究严格证明的科学,试看哥德巴赫猜想:"大

偶数可表成两素数之和",4=2+2,6=3+3,8=3+5,10=5+5,12=5+7,…,等,谁也举不出一个反例来推翻哥德巴赫猜想,但是数学还是坚持要求给出严格的正确证明,证明(或否定)哥德巴赫猜想成立(或不成立)。不证明的数学结论(除公理而外)没人敢信,这在数学史上已有教训,例如

$$2+1=3,2^2+1=5,2^{2^2}+1=17,2^{2^{2^2}}+1=65537\cdots$$

都是素数,人们曾猜想

$$2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}+1$$

形状的数皆素数,但后来发现 $2^{2^{2^{2^2}}}+1$ 有一个因数是 $2^{19}\times1575+1$,在数学中,有限次实验的结果得出的经验结论是必须证明的!

(2)八股取士考试制度的错误导向,使年轻学子大多数放弃数学深究,成了数学盲。在封建思想教育之下,多数知识分子一心只读"圣贤书",幻想"朝为田舍郎",通过八股考试,"暮登天子堂",而八股考试是"免试"数学的! 于是多数学生只读些"子曰诗云"之类的宣扬封建礼教与数学无助的文科经书。数学研究失去了群众基础。

(3)盲目排外。李约瑟指出"中国早先几乎与世隔绝,存在排外的社会因素,从中国传出去的东西比传人的东西多得多。"例如我国的《九章算术》等很早就传入日本、朝鲜等国,有迹象表明(例如"莲花问题")也传人了印度;但当时反对接受外国数学者大有人在,例如中国数学家梅冲直言,学习外国数学是"不遵守成法","失其故步",公开反对学习外人;故步自封的社会风气,可见一斑。

中国现代思想家顾准评论中国封建社会时指出:"中国的传统思想,没有产生出科学与民主;如果探索一下中国的文化渊源与根据,可以断定,中国产生不出科学与民主来。中国的传统思想,还是中国人身上的历史重担。古代文物成为悠久文明的证据与夸耀。"顾准尖锐地批评中国的伦常礼教和封建制度时说:"除了论常礼教,没有学问,专心知识、探究宇宙秘密不是出路,中国只有道德

训条，中国没有逻辑学，中国有原始辩证法，然而中国人太聪明，懒得穷根究底。"顾准所谈的科学、学问和知识是指诸如数学和物理、化学等自然科学，事实上，历代封建君主强迫与引诱人们信奉的"三纲五常"之类的封建思想与数学和自然科学的科学思想是格格不入的！

顾准的这些话，有的放矢，语重而心长，切中古代数学衰落的要害，很值得每个数学家和想做数学家的人们深思。

事实上，从秦始皇焚书坑儒到乾隆的文字狱，封建思想专制搞得中国知识分子人人谨小慎微，不敢说皇帝、圣人和权贵没讲过的话，大多数旧知识分子失去了创新意识，久而久之，形成了一种社会遗传基因。历代封建统治者，把中国知识分子当成宣传封建迷信、儒家教义和忠君保皇思想的奴仆。在这种社会政治氛围中，数学科学不可能持续发展。

7　中国古代传统数学向西方数学过渡

从朱世杰《四元玉鉴》问世的第二年（1304 年）到华罗庚从清华大学去剑桥大学做访问学者（1936 年），我们把这一时期称为中国古代传统数学向西方数学演化的过渡时期。

从 1304 年到 1606 年，中国古代数学几乎停滞不前，1606 年是徐光启和意大利传教士利玛窦（Matteo Ricci）合作把欧几里得《几何原本》译成中文的那一年，第二年（1607 年）《原本》中文版正式出版，在这一时段，中国数学家把中国古代的数学名著歌诀化，这一时期出现的数学新作也大都包含大量的数学歌谣，同时珠算成了主要运算工具，以适应商业发展之需。这一时段称为"歌诀珠算期"，以创造性的标准来衡量，这一时段是中国数学的低水平时期。

从 1607 年（中文版《几何原本》出版）到 1880 年，这一时段，大量西方数学介绍到中国。例如 1605 年，波兰传教士穆尼阁把对数传入中国，1859 年，李善兰（1811—1882）与英国传教士伟烈亚历（A. Wylie）共同翻译出版了中文版《代微积拾级》，此书英文书名为

Elements of Analytical Geometry and of Differential and Integral Calculus，为1851年美国数学家罗密斯（E. Loomis）所著，按现在的讲法，似应把中文版书名译成《解析几何与微积分原理》。李善兰又翻译出中文版《代数学》，原版是英国数学家德·摩根1835年所著的代数学教科书；1874年华蘅芳把英国数学家华里斯（Wallace）所写的微积分著作《微积溯源》译成中文，中文版分8卷出版；1874年，华蘅芳又把华里斯的《代数术》译成中文；1877年华蘅芳把英国数学家海马斯（John Hymars）的《三角数理》译成中文；1880年，华蘅芳把英国概率论专家伽罗威（Galloway）的概率论著作《决疑数学》译成中文（10卷本）。

1607年至1880年这一时段，中国数学家开始接触和吸收西方数学内容。但这一时期，由于社会政治环境和当时中国数学基础等条件所限，对外来数学的学研成效并不显著，数学教学内容仍以初等数学为主，即使教一点初等微积分，也是用传统的中式语言来表述。加之当时出现的排外复古思潮的泛滥，西方数学的传入、学习与研究工作很快陷于停顿，转向挖掘与整理中国历史上的数学名著，与世界先进数学的差距并未减小。

从1881年到1936年，在西方列强的坚船利炮面前，清政府的腐败无能暴露无遗，有识之士意识到兴办科学技术和改革教育富国强兵之必要性和紧迫性。1911年辛亥革命推翻帝制，1912年北京大学成立“数学门”，1918年改称数学系，并向国外派遣留学生。1920年，清华大学创建数学系。

留学学成回国的数学家在各大学创办数学系的有：

1912年，冯祖荀（留日回国）创办北京大学数学系。

1920年，郑之蕃（留美回国）创办清华大学数学系。

1920年，姜立夫（留美回国）创办南开大学数学系。

1921年，熊庆来（留法回国）创办东南大学数学系。

1924年，陈建功（留日回国）创办武昌大学数学系。

1929年，陈建功（留日回国）创办浙江大学数学系。

1931年，陈建功与苏步青（留日回国）在浙江大学创办中国第

一个数学讨论班。

这一时期，办数学系的大学还有厦门大学、中山大学、四川大学、武汉大学、复旦大学、北京师范大学、东北大学、交通大学、安徽大学、山东大学、河南大学等。

中国第一位获得数学博士学位的是胡明复(1891—1927)，他于1917年以论文《具边条件的线性微分方程论》获哈佛大学博士学位，回国后与胞兄胡敦复创办上海大同大学，任数学教授。

1935年成立中国数学会；1936年出版《中国数学学报》。

1930年，清华大学在国内首次招收数学研究生，陈省身、吴大任是国内最早的研究生。

这一时期著名的老一辈数学家有：郑之蕃、王锡恩、冯祖荀、姜立夫、何鲁、赵访熊、程廷熙、余介石、范会国、傅种孙、吴在渊、陈荩民、李锐夫、陈建功、熊庆来、苏步青和华罗庚。

1936年，访问清华大学的数学家维纳推荐华罗庚去剑桥大学做访问学者，在哈代的门下进行数学研究，华罗庚在数论等方面取得了重大成果，至此中国数学向西方数学的过渡已告结束，中国数学家进入了现代数学的研究阶段。

下面把1304年—1936年这一历史时期中国数学家的工作略加介绍。

程大位(1533—1606)，安徽休宁人，字汝思，号宾渠，长于书法和数学，20岁后在长江中下游经商，是徽商中的名流。为了商务计账之需，关心数学，遍寻名师，研读数学古籍，40岁后停止经商而潜心研究数学，终于大器晚成，是中国16世纪末有名的数学家，他60岁时写成《直指算法统宗》17卷，之后又"删其繁芜，揭其要领"，精编成《算法纂要》4卷，于1598年出版。《算法纂要》是中国古算著作中发行量最大流传最广的一部书，是系统总结珠算技术为主的著作，全书595题，大多取自前人算经，程大位用珠算加以解答，书中全面记录了珠算的四则运算口诀，程大位给出用珠算开平方与开立方的算法，堪称一绝，还有一种称为"一掌金"(或称"袖里囤金")的"指算法"，真所谓掐指一算，心中有数。此书深受我国

各界群众欢迎,“握算持筹之士,莫不家藏一编”。明末,此书传入朝鲜、日本及东南亚各国。

《算法纂要》中不仅有珠算的各种妙法,而且还有民间算法“金蝉脱壳”、“铺地锦”(格子乘法)、多种幻方和北宋到明代数学文献51种。

明代的另一位有影响的数学家是徐光启。

徐光启(1562—1633),字子先,号玄扈,上海徐家汇人。1597年京试中举,1604年中进士,同年入翰林院,1629年任礼部左侍郎,1633年官至文渊阁大学士。

徐光启是翻译引进西方数学到中国的第一人。他与利玛窦合译出《几何原本》前6卷,是中国数学史上的大事,使得中国数学界破天荒第一次见识到数学的公理系统与严格的逻辑推理方式,功德无量。徐光启的译本被当时学术界誉为“字字精金美玉,乃千古不朽之作。”几何中的许多中文名词,例如点、直线、平面、曲线、曲面、直角、锐角、钝角、垂线、平行线、对角线、相似、外切等等,都是徐光启译定的。

徐光启的个人著作有《测量异同》与《勾股仪》两种,讲述三角学与测量技术,且编出《崇祯历书》,介绍了西方天文历法与三角学内容。

清代数学家中最著名的当数梅文鼎、李善兰和华蘅芳3位。

梅文鼎(1633—1721),安徽宣城人,字定九,号勿庵,生于梅氏名门书香之家,14岁考中秀才,27岁写出《历学骈枝》4卷,内容是对明代《大统历》的论述,书中还论述了推算日食和月食的方法。1672年,写成数学著作《方程论》6卷。1702年,著《勿庵历算书目》,对我国古代数学名著作了深入探讨,1761年其孙把《勿庵历算书目》重编成《梅氏丛书辑要》60卷,对弘扬民族文化与科学,此书起了很积极的作用,它通俗易懂,“展卷了然,即初学无难阅读”。梅文鼎活了88岁,著书88种,其弟、子、孙、曾孙4代人十数位皆研究数学,是我国与祖冲之家族齐名的数学世家。数学史家严敦杰说:“17世纪至18世纪我国数学研究,主要为安徽学派所掌握,

而梅氏祖孙为中坚”。

梅文鼎能正确对待西方数学，且努力领会西方数学（例如徐光启译的《几何原本》）中的精华与思想方法，把它与中国传统数学结合在一起，“述中传西，继往开来。”在梅文鼎的著作中对西方数学“技取其长而理唯其是。”梅文鼎是中国数学向西方数学过渡的带头人。

梅文鼎因其渊博的中外数学知识和丰硕的研究成果，使清代朝野都十分敬重他。1705 年，康熙在南巡北归的船上召见梅文鼎，留梅文鼎同舟而行三日，向梅文鼎咨询畅谈天文与数学，且亲笔为梅文鼎题了“绩学参微”4 个大字，对梅文鼎极为赏识，梅文鼎去世时，康熙亲自过问梅文鼎的治丧事宜，且命令曹雪芹之父曹頫（江宁地方官）主持葬礼。

下面举几则梅文鼎的具体工作。

（1）给出勾股定理新证明，如图 1.52 所示。

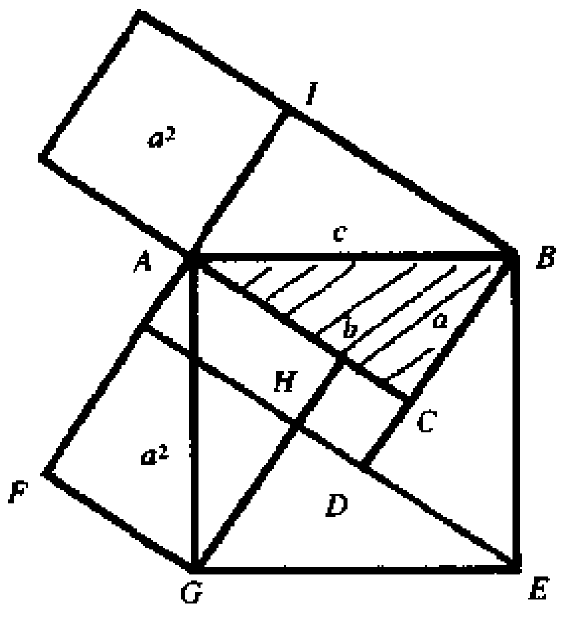


图 1.52

（2）独立发现黄金分割作图法，见图 1.53，已知线段 AB：

①作 $OB \perp AB$，取 $OB=\frac{1}{2}AB$，以 OB 为半径，O 为圆心作圆 O；

②作射线 AO，AO 与圆 O 交于 E，F 两点；

③以 A 为圆心，以 AE 为半径作圆，交 AB 于 C 点；

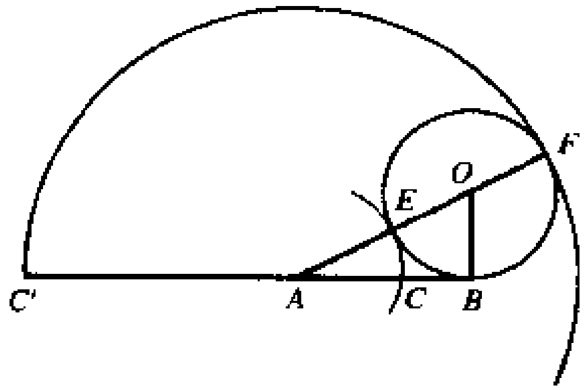


图 1.53

④以 A 为圆心，以 AF 为半径作圆交 BA 延长线于 C'。

则

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{CB},\frac{AB}{AC'}=\frac{AC'}{C'B}$$

(3)得出圆内接正五边形边长 a_5、内接正六边形边长 a_6 与内接正十边形边长 a_{10}的关系式

$$a_6^2+a_{10}^2=a_5^2$$

(4)得到正多面体的几何性质。

(5)得到积化和差公式

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]\quad（初数）$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]\quad（次数）$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]\quad（甲数）$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]\quad（乙数）$$

梅文鼎著《平三角举要》与《弧三角举要》是我国最早的三角学与球面三角学著作。

值得一提的是，梅文鼎误认为西方数学的来源是中国古代数学，即“西学中原”论。这种思想在明末清初已有表现，梅文鼎把它宣扬得更普及。事实上，数学的起源不是一元化的，面是多元的，

并非是中国产生数学之后向世界各国传播的。康熙作为封建大一统的帝王,这种"西学中原"的论调正好迎合了这位皇帝的帝王尊严,于是倍受清政府的鼓励,后经戴震、阮元、李锐等的继承与发挥,使"西学中原"演化成复古主义的重要依据,激化了狭隘民族主义与固步自封的情绪,对我国接受西方数学起了阻碍作用。数学是科学,不是为皇权政治服务的工具,不然,会窒息数学的发展,梅文鼎与康熙的"西学中原"的历史教训不宜忘却。

李善兰(1811—1882),原名心兰,号秋纫,别号壬叔,浙江海宁人,10 岁通读《九章算术》,15 岁学完《几何原本》前 6 卷,参加乡试,因八股文不及格而名落孙山。后又学习李冶的《测圆海镜》,对数学与天文情有独钟,闹出了"洞房失踪"的笑话,新婚之夜突然失踪,弄得家长和亲朋十分着急,到处寻找,后在二楼找到他,正猫着身子,头探出窗外专心观测天象。

前面我们谈到,李善兰翻译了好几种西方高等数学著作,他是把解析几何与微积分介绍给中国人民的第一人;他本人的数学著作亦颇丰硕,例如在《方圆阐幽》一书中,李善兰得到公式

$$\pi = 4 - 4\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{1}{9} + \cdots\right)$$

$$\ln n = \left(\frac{n-1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n}\right)^3 + \cdots$$

而且由此造出对数表。

1867 年李善兰出版名著《则古芳斋算学》24 卷,收录了他 20 余年的数学与天文着作 13 种:《方圆阐幽》、《弧矢启秘》、《对数探源》、《垛积比类》、《四元解》、《麟德求解》、《椭圆正求解》、《椭圆新术》、《椭圆拾遗》、《火器真诀》、《对数尖锥变法解》、《级数四术》、《天算或问》,此前他还出版翻译作品 7 部近百万字。

李善兰 61 岁时发表了《考数根法》的论文,给出了素数判别法,论文中还证明了"费马小定理",且倍出其逆定理不真,即若 p 是素数,对于任意的正整数 a,

$$a^p \equiv a(\bmod p)$$

但若 $a^p \equiv a(\bmod p)$，p 未必是素数。

在《垛积比类》中，李善兰建立且证明了著名的李善兰恒等式

$$\sum_{j=0}^{k}(C_k^j)^2 C_{n+2k-j}^{2k} = (C_{n+k}^k)^2 \tag{1.34}$$

这个不等式的证明谈何容易，兹摘录如下。

由于

$$C_{n+k}^k = \frac{(n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)}{k!}$$

所以只欠证明

$$\sum_{j=0}^{k}(C_k^j)^2 \frac{(x+2k-j)(x+2k-j-1)\cdots(x-j+1)}{(2k)!} = \left[\frac{(x+k)(x+k-1)\cdots(x+1)}{k!}\right]^2 \tag{1.35}$$

若式(1.35)成立，则 $x=n$ 时即得式(1.34)。

式(1.35)是 x 的 $2k$ 次多项式，且右端有二重根 $x=-l, l=1,2,\cdots,k$，所以只欠证明

①式(1.35)两端 x^{2k} 的系数相等，即

$$\sum_{j=0}^{k}(C_k^j)^2 = \frac{(2k)!}{k!k!} \tag{1.36}$$

②式(1.35)左端也有 $x=-l(l\leqslant l\leqslant k)$ 是它的重根。

先证①。由二项式定理，

$$(1+x)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j x^j$$

因此，$(1+x)^k(1+x)^k$ 里 x^k 的系数等于

$$\sum_{i+l=k} C_k^i C_k^l = \sum_{j=0}^{k} C_k^j C_k^{k-j} = \sum_{j=0}^{k}(C_k^j)^2$$

另一方面，

$$(1+x)^k(1+x)^k = (1+x)^{2k}$$

在其展开式中，x^k 的系数为

$$C_{2k}^k = \frac{(2k)!}{k!k!}$$

即①成立。

下面证②。式(1.35)中左端每项皆含因式 $x+l$,所以它有根 $x=-l$。下证 $x=-l$ 是它的二重根。由于式(1.35)左端各项皆有因式 $x+l$,所以

$$\frac{1}{x+l}\sum_{j=0}^{k}(C_k^j)^2\frac{(x+2k-j)(x+2k-j-1)\cdots(x-j+1)}{(2k)!}=$$

$$\sum_{j=0}^{k}(C_k^j)^2\frac{(x+2k-j)(x+2k-j-1)\cdots(x+l+1)(x+l-1)\cdots(x-j+1)}{(2k)!} \tag{1.37}$$

下面证明,当 $x=-l$ 时,式(1.37)的值是零。

事实上,当 $x=-l$ 时,式(1.37)的值是

$$\sum_{j=0}^{k}(C_k^j)^2\frac{[(2k-j-l)(2k-j-l-1)\cdots1][-1\cdots(-l-j+1)]}{(2k)!}=$$

$$\sum_{j=0}^{k}C_k^j\frac{k!}{(k-j)!j!}\cdot\frac{(2k-j-l)!(l+j-1)!}{(2k)!}(-1)^{l+j-1}=$$

$$(-1)^{l-1}\frac{k!}{(2k)!}\sum_{j=0}^{k}(-r)^jC_k^j\frac{(2k-j-l)!(l+j-1)!}{(k-j)!j!}=$$

$$(-1)^{l-1}\frac{k!}{(2k)!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^jC_k^j(2k-j-l)\cdots$$

$$(k-j+1)(l+j-1)\cdots(j+1) \tag{1.38}$$

其中

$$(2k-j-l)\cdots(k-j+1)(l+j-1)\cdots(j+1)$$

是多项式

$$f(x)=(2k-x-l)\cdots(k-x+1)(l+x-1)\cdots(x+1)$$

当 $x=j$ 时的值,面 $f(x)$ 是 x 的

$$(k-l)+(l-1)=k-1$$

次多项式,所以 $f(x)$ 是次数低于 k 的多项式,则

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^jC_k^jf(x-j)=0 \tag{1.39}$$

由式(1.39)知式(1.38)为零,证毕。

1868 年,李善兰到北京任同文馆“天文算学馆”的总教习,“天

文算学馆"相当于大学的数学天文系，从此李开始了他的教学生涯。"天文算学馆"李善兰的同事美国人丁韪良(W.A.P.Martim)谈到天文算学馆培养了很多有作为的名家学者时说："是皆李壬叔先生教授之力也。呜呼合中西之各术，使算学复兴于世者，非壬叔吾谁与归?"

直到晚年他仍坚持教学与科研，去世前几个月，还完成了《级数勾股》一书。正可谓"莫道彩笔随老去，佳作偏染夕阳红。"李善兰性格豁达，清白耿直，不趋炎附势，不追求名利，他虽高居内阁三品之官位，但从未脱离同文馆的教学科研岗位，他的房门对联曰："小学略通书数，大隐不在山林。"

1982年12月9日，中国科学院为李善兰百年诞辰举行了纪念他的学术研讨会，李善兰的家乡海宁县建立了李善兰陈列馆。

华蘅芳(1833—1902)，江苏无锡人，字若汀。年青时赴上海向李善兰学习数学，李向他推荐《代数学》与《代微积拾级》两部李译本高等数学去自学，华蘅芳自称初读这两部书时"不得其意"，"不知其所语云耳"，他不懈地反复研读，终于"譬如傍晚之星，初见一点，旋见数点，又见数十点，数百点，以致灿然布满天空。"华蘅芳是靠自学成功的数学家。

1868年，华蘅芳到上海江南制造总局的翻译馆从事西方科学技术的翻译工作，他与外国人合作翻译的数学著作有7部：《代数术》、《三角数理》、《微积溯源》、《代数难题解法》、《决疑数学》、《算式解法》、《合数术》等。

从1874年起，华蘅芳在上海格致书院进行教学科研工作近20年，且写成数学著作《开方别术》、《数根求解》、《开方古义》、《积较术》、《学算笔谈》、《算草丛存》等6部，合编成《行素轩算稿》，于1882年出版发行。

华蘅芳翻译出《决疑数学》，在该书"总引"中华蘅芳指出概率论的科学道理可用于"国家治民、或民自治、或兴起风俗、改定章程"可治"好赌之弊、代替占卜"等。

第二章　灿烂的希腊古代数学与第一次数学危机

国王问曰："几何之法，更有捷径否？"欧几里得答曰："夫几何一途，若大道然，王安得独辟一途也？"

1　毕达哥拉斯学派的是非和第一次数学危机

古希腊数学是指公元前600年到公元600年期间，希腊半岛、意大利半岛、埃及北部等爱琴海、亚得里亚海、地中海沿岸地区的数学家们创造的数学；它的特点是以几何为核心内容，以论证为主要方法；后世称之为"论证数学"。主要成就有勾股定理与无理数，三大几何作图问题，欧几里得几何和圆锥曲线的理论，代表人物有毕达哥拉斯、欧几里得、阿基米德和阿波罗尼奥斯。

"论证数学"的先行者是泰勒斯（Thales of Miletus，约公元前625—公元前547），他被后人传说为世界第一位数学家和几何证明的创始人，他与柏拉图、苏格拉底、亚里斯多德、毕达哥拉斯、欧几里得、阿基米德并称"希腊七贤"，泰勒斯是七贤之首。

泰勒斯早年经商，往返于埃及、巴比伦等地，使得他的思想倾向于自由，不情愿宗教信条的束缚，且从各地学习到不少天文与几何学方面的知识，使他养成精明且严谨细致的学者风度。

据传，泰勒斯预报了公元前585年5月28日的日蚀，利用日影测量过金字塔的高度，由此推测泰勒斯已知道三角形相似的道理。

泰勒斯最主要的贡献是引入定理必须证明的思想，由此开创希腊几何公理系统的先河。据希腊学者普洛克鲁斯（Proclus，410—485）在其所著《欧几里得〈原本〉第一卷评注》等文献中称，泰勒斯证明出以下定理：

(1)圆的直径把圆划分成全等的两部分。

(2)等腰三角形两底角相等。

(3)对顶角相等。

(4)若一个三角形有两内角及夹边与另一三角的两内角及夹边分别对应相等，则两三角形全等。

(5)半圆上的圆周角是直角。

在泰勒斯的示范之下，希腊数学开始由直观感性的经验阶段向抽象的理论证明阶段过渡，这是数学史上里程碑式的突破，对数学的成长与发展具有极其重大的意义。

毕达哥拉斯（Pythagoras，约公元前580—公元前500）是泰勒斯的传人，生于希腊东部的萨摩斯岛，据说曾就学于泰勒斯名下，游历过埃及和巴比伦。毕达哥拉斯在意大利南部的克伦吞成立了一个秘密组织，是一个集科学、宗教与哲学于一体的帮会性学术团体，后人称此团体为毕达哥拉斯学派，该学派的门徒们继承本学派的宗旨，存在了两个世纪之久。毕达哥拉斯后来在政治斗争中失败被杀，但他们的数学贡献却是永垂不朽的。

毕达哥拉斯在世时，学派内有300余名男女成员，例如西雅娜（Theano）是该学派的骨干份子，她是毕达哥拉斯的学生并受到赏识，两人结为伉俪。毕达哥拉斯学派在政治上代表奴隶主贵族的利益，反对民主派，这个团体内部实行原始共产主义制度，每人必须交出全部财产，供大家共同享用，一切发明不许归个人名下，均属其领袖毕达哥拉斯的成果。他们一度十分得势，公元前430年希腊的银币上铸有毕达哥拉斯的浮雕肖像。毕达哥拉斯的团体纪律严明，主要有两条：一是一切服从毕达哥拉斯，二是一切发明不准私自外传。

毕达哥拉斯学派在数学上的信条是“万物皆数”。他们所说的

数是指正整数和正分数。认为 10 最完美，$1+2+3+4=10$，称 1，2，3，4 为“四象”，据传，加入毕氏团体的人的宣誓誓词为：“谨以赋予我们灵魂的四象之名宣誓。”

毕达哥拉斯学派的数学成就颇丰，下面介绍几种有代表性的成果。

1）证明勾股定理

最早发现勾股定理的国家是古巴比伦，最早证明者为毕达哥拉斯（它的证明的原稿已失传），据传他的证明如图 2.1（a）与（b）两图中有 4 对全等三角形△Ⅰ≌△Ⅰ′，△Ⅱ≌△Ⅱ′，△Ⅲ≌△Ⅲ′，△Ⅳ≌△Ⅳ′，于是 $c^2=a^2+b^2$。

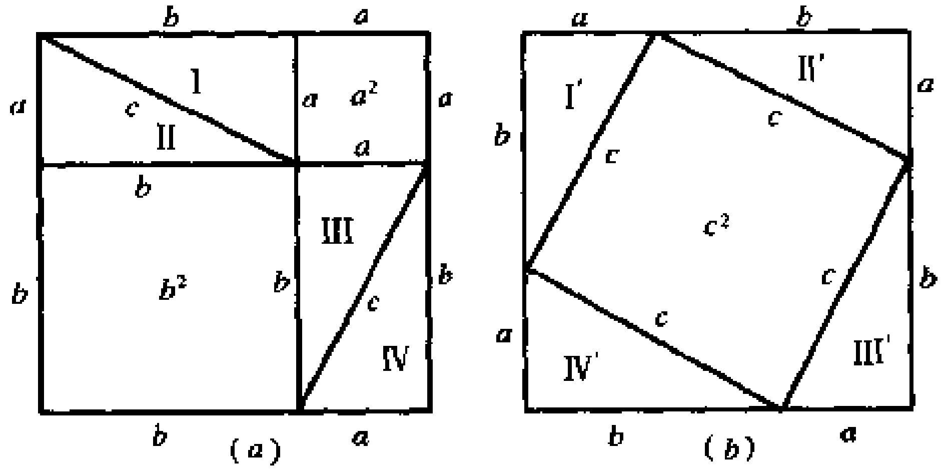


图 2.1

这个证明显示出思路设计者非平凡的聪明。

据传毕达哥拉斯学派发现并证明了勾股定理之后，当即宰牛百头祭神，后人称勾股定理为“百牛定理”。

毕达哥拉斯学派还发现

$$2m,m^2-1,m^2+1$$

是一个直角三角形的三条边之长，其中 m 是自然数，称$\{2m,m^2-1,m^2+1\}$为毕氏勾股数。

2）正多面体作图

欧几里得在《原本》第八卷指出，正四面体、正六面体和正八面

体是毕达哥拉斯学派作出的，而正十二面体和正二十面体则是毕达哥拉斯学派的学生蒂奥泰德（Theaetetus）做出的。1885 年之后在意大利多处出土石制正十二面体，经考证这些模型为公元前 500 年前毕达哥拉斯学派所制。

其中正十二面体的每个面皆正五边形，而做出正五边形的边长需要进行黄金分割，说明毕达哥拉斯学派的人可能知道黄金分割作图法。

毕达哥拉斯十分崇拜正多面体，称之为“宇宙形”。

3）形数

图 2.2 中点的总数称为“三角形数”，设在一条射线上有 n 个点，则三角形数为

$$N_3 = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

图 2.3 中点的总数称为“四角数”，四角数为

$$N_4 = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

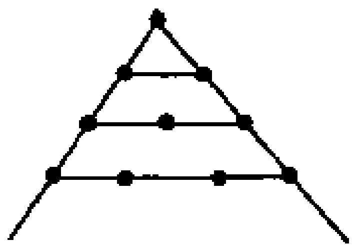


图 2.2

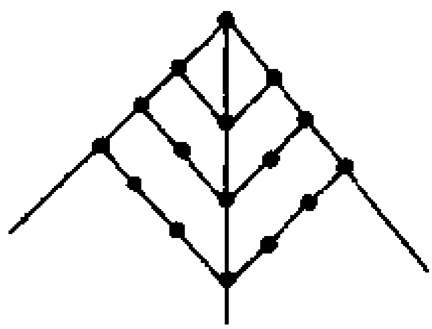


图 2.3

图 2.4 中点的总数称为“五角数”，五角数为

$$N_5 = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \frac{(3n-1)n}{2}$$

图 2.5 中点的总数为“六角数”，六角数为

$$N_6 = 1 + 5 + 9 + \cdots + (4n-3) = n(2n-1)$$

相似地可以求得 n 角数 N_n，n 是任一自然数，$n \geqslant 3$。

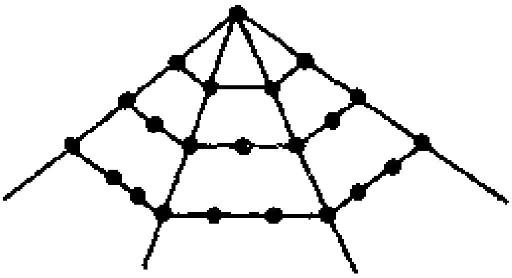


图 2.4

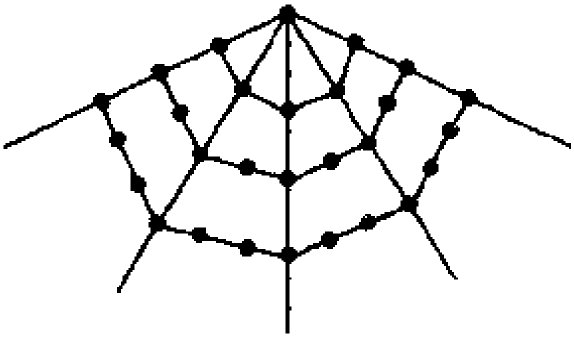


图 2.5

4)完全数与亲和数

毕达哥拉斯把 1 视为整数 n 的因数,而 n 则不是 n 的因数;毕达哥拉斯学派把一个整数各因数之和大于、小于或等于这个整数时,分别称这个整数为过剩数,不足数和完全数。例如 $6=1+2+3$,所以 6 是完全数。

欧几里得给出偶完全数公式

$$N=2^{n-1}(2^n-1)$$

其中 $n>1, n\in N$,且使 2^n-1 为素数。

今日称 2^n-1 形的素数为梅森素数。

现在已知 $2^{11211}(2^{11212}-1)$是一个欧几里得偶完全数,它是一个 6751 位的天文数字!已经没有办法按十进制把它抄在纸上,因为它数字串太长了。

1936 年 3 月 27 日,联合通讯社播发了一个激动人心的报道说芝加哥的 S.I.克利格(Krieger)博士发现了一个 155 位的完全数,他为得到这个数整整干了 5 年之久才证明了它确为完全数,事实上它是 $2^{256}(2^{257}-1)$,难点是证明 $2^{257}-1$ 是素数,这个完全数是:

26,815,615,859,885,194,199,148,049,996,411,692,254,958,731,641,184,786,755,447,122,887,443,528,060,146,978,161,514,511,280,138,383,284,395,055,028,465,118,831,722,842,125,059,853,682,308,859,384,882,528,256。

较小的完全数有 28,496,8128,33550336 等。

迄今无人能证明:奇数能否为完全数。

如果 a 与 b 为两个整数，a 的因数之和等于 b（a 不是 a 的因数），而 b 的因数之和等于 a，则称 a 与 b 是一对亲和数。例如

$$220 = 1 \times 2 \times 2 \times 5 \times 11$$

220 的因数为 1,2,5,11,4,10,55,20,110,22,44，其和恰为 284。

$$284 = 1 \times 2 \times 2 \times 71$$

284 的因数为 1,2,142,71,4，其和恰为 220，所以 220 与 284 是一对亲和数。

1750 年，欧拉发现了 60 对亲和数，可惜欧拉遗漏了第二对亲和数 1184 与 1210，1866 年被 16 岁少年巴格尼尼（B.N.Paganini）发现，1184，1210 这对次小的（最小的一对亲和数是 220 与 284）亲和数一百多年间那么多大数学家竟无一人发现！

毕达哥拉斯有名言说："亲友就是另一个自我，犹如 220 与 284 一样"。

阿拉伯数学家考拉（T. B. Korrah）给出一个求亲和数对的公式：$x > 1, x \in N$，

$$a = 3 \times 2^x - 1$$

$$b = 3 \times 2^{x-1} - 1$$

$$c = 9 \times 2^{2x-1} - 1$$

若 a, b, c 皆素数，则 $2^x ab$ 与 $2^x c$ 是一对亲和数，$x = 2$ 时得 220 与 284 这对亲和数。目前知道的最大亲和数对为 111448537712 与 118853793424。

5）第一次数学危机与无理数

约公元前 470 年，毕达哥拉斯学派成员，毕的学生希帕苏斯（Hipasus）考虑边长为 1 的正方形的对角线的长度，根据勾股定理，对角线长 l 应满足 $l^2 = 2$，什么样的数 l，它的平方是 2 呢？ $1^2 = 1, 2^2 = 4$，显然 l 不是整数，亚里士多德证明 l 不是有理数，他的证明如下：

若 $l = \frac{q}{p}$，$\frac{q}{p}$ 是既约分数，则 $l^2 = \frac{q^2}{p^2} = 2, 2p^2 = q^2$，于是 q 不是奇数，设 $q = 2k$，k 是自然数，进而 $4k^2 = 2p^2, 2k^2 = p^2$，于是 p 不是奇数，设 $p = 2r$，r 是自然数，从而

$$\frac{q}{p}=\frac{2k}{2r}=\frac{k}{r}$$

与$\frac{q}{p}$是既约分数相违，所以 l 不是整数与分数。

由此人们揭穿了毕达哥拉斯“万物皆数”的数只是整数与分数是不成立的。毕达哥拉斯的绝对权威受到了严重的挑战。

一方面已证明单位正方形对角线的长不是整数与分数，按毕达哥拉斯学派的观点，这条对角线的长度就不是数！这当然是不能接受的。另一方面，毕达哥拉斯学派对数的根深蒂固的认识又不肯承认自己的观念有问题。于是一时间陷入极大的矛盾之中，这就是第一次数学危机。

传说当时毕达哥拉斯学派的全体成员正在爱琴海上泛舟集会，希帕苏斯贸然说出了他的上述发现，本学派其他成员听到这一可怕的消息，吓得个个目瞪口呆，当即决议禁止把此事张扬出去，泄密者死，后来希帕苏斯还是把它透露出去了，结果按毕达哥拉斯学派的纪律，把希帕苏斯投入大海，葬身鱼腹！

后人歌颂希帕苏斯是“科学的星座”，“历史证明了真理的胜利，在神奇的数学王国的宫墙上，永远铭刻着希帕苏斯的名字。”数学史表明，类似的情形并不罕见，将来也不一定不再重演。

第一次数学危机后承认除整数和分数外，还存在另外的实数，由于对这种怪实数的接受很不情愿，于是给它起了个难听的名字：无理数。

数学中闹危机是好事，第一次数学危机促使无理数这一数学中的重要角色的出生；数学危机是会下金蛋的鹅。

据柏拉图说，大约公元前 425 年，狄奥多鲁斯（Theodorus of Cyrene）证明了$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{7}$，$\sqrt{8}$，$\sqrt{10}$，$\sqrt{11}$，$\sqrt{12}$，$\sqrt{13}$，$\sqrt{14}$，$\sqrt{15}$，$\sqrt{17}$也是无理数。

一般无理数的理论直到 1872 年，由德国著名数学家戴德金（Dedekind Julius Wilhelm Richard，1831—1916）严格地建立起来。戴是高斯的得意门生，1852 年获格了根大学博士学位，留校任教，与

狄利克雷和黎曼结成好友，他的主要贡献在实数理论和代数数论方面。他用“戴德金分割法”定义无理数和连续性理论，为实数理论的建立做出了不可磨灭的贡献；其代表作有《连续性与无理数》和《数的意义》，编辑了《狄利克雷全集》和《黎曼全集》。

下面介绍戴德金的关于无理数理论的大意。

戴德金对无理数的定义是直观的和构造性的。把全体有理数集记成$\mathbb{R}'$，由于任两个有理数的平均值仍是一个有理数，$\mathbb{R}'$是无穷集合，戴德金称$\mathbb{R}'$为有理数网，有理数网是有序集合。

设$A=\{a\}$是$\mathbb{R}'$的非空子集，且$\forall a\in A$，若$a'<a$时，有$a'\in A$，则称A是$\mathbb{R}'$的一个“下子集”；相似地，若$B=\{b\}\subset\mathbb{R}'$，$B\neq\emptyset$，$\forall b\in B$，且$b'>b$时，有$b'\in B$，则称$B$是$\mathbb{R}'$的一个“上子集”。

若$C'\subset\mathbb{R}'$，$\overline{C'}=\mathbb{R}'-C$，$\bar{C}$称为$\mathbb{R}'$中$C$的补集。

显然，A是一个“下子集”，则$\bar{A}$是一个上子集，反之亦然。

即为上子集又为下子集的集合就是$\mathbb{R}'$，$\overline{\mathbb{R}'}=\emptyset$。

若A是下子集，但A不含最大的数，则称A是“开的”，否则称A是“闭的”；若B是上子集，但B不含最小的数，则称B是“开的”，否则称B是“闭的”。

若A是闭的，那个最大的数称为A的界数，若B是闭的，那个最小的数称为B的界数。

显然，下子集A是闭的，则$\bar{A}$是开的；上子集B是闭的，则$\bar{B}$是开的。

在$\mathbb{R}'$中不会同时存在互补的闭的下子集与上子集。

若上子集A与下子集B互补，则称下子集A与上子集B构成了有理数网的一个划分，记此划分为(A,B)，这时$\bar{A}=B$，A与B不全是闭的，于是

（甲）A与B是一开一闭，或（乙）A与B全是开的。

由于闭的上子集和闭的下子集皆以有理数为界数，所以若A与B中有一个是闭的，则称(A,B)为一个有理划分。

下面考虑(A,B)中是否可能出现A与B皆为开的情形。回答是肯定的。

例如取

$$B=\{b \mid b^2>2, b>0, b\in \mathbb{R}'\}$$

$$A=\mathbb{R}'-B$$

下证(A,B)是$\mathbb{R}'$的一个划分,且 A 与 B 皆开的。

事实上,若正有理数 $b\in B$,由 B 的定义,若任有理数 $r>b$,则 $r>0, r^2>b^2>2$,于是 $r\in B$,可见 B 是$\mathbb{R}'$的一个上子集;进而 $B=A$ 是$\mathbb{R}'$的一个非空下子集,至此知(A,B)是$\mathbb{R}'$的一个划分。

下面证明 A 与 B 皆是开的。

(1) B 是开的

即往证 B 中没有最小的数;反证之,若 b 是 B 的最小数,则 $b>0, b^2>2$;如果我们能找到一个正有理数 h,使得 $b-h>0$ 且$(b-h)^2>2$,从而 $b-h\in B$,而 $b-h<b$,此与 b 是 B 中最小数矛盾。

找 h 的过程如下:由$(b-h)^2>2$,即 $b^2-2bh+h^2>2$,

$$2bh-h^2<b^2-2$$

我们取 $h<\dfrac{b^2-2}{2b}$,则有 $2bh<b^2-2$,进而有上式成立,即$(b-h)^2>2$ 成立,取 $0<h<\min\left\{b,\dfrac{b^2-2}{2b}\right\}$,且 h 是有理数即可。

(2) A 是开的

只欠证 A 中无最大数,反证之,设 a 是 A 中最大数,由于 $1^2<2$,所以 $1\in A$;又 a 是 A 中最大数,故 $a>1$。

由 $a\in A, A=\mathbb{R}'-B$ 知 $a^2\leqslant 2$,又 a 是有理数,故 $a^2\neq 2$,即 $a^2<2$。

下面证实,可以找到如此之小的正有理数 h',使得$(a+h')^2<2$:

$(a+h')^2<2$ 等价于 $a^2+2ah'+h'^2<2$,等价于 $2ah'+h'^2<2-a^2$;为此选正有理数 h',使得 $h'<2a$,且 $h'<\dfrac{2-a^2}{4a}$,进而

$$h'2<2ah'$$

$$4ah'<2-a^2$$

$$h'^2+2ah'<2-a^2$$

$$(a+h')^2<2$$

$(a+h')^2<2$，所以 $a+h'\in A$，又 $h'>0$，$a+h'>a$，与 a 是 A 中最大数矛盾。

我们看到，对于有理数网，存在划分 (A,B)，其中 A 与 B 皆开的。

由上述背景，戴德金与英国数学家与逻辑学家罗素（Russell Bertrand Arthur Willian，1872—1970）给出下面定义。

定义 1 有理数网 $\mathbb{R}'$ 的每个有开的下子集 A 的划分 (A,B) 称为一个实数，若 B 是闭的，r 是 B 的界数，则 (A,B) 表示有理数 r，记成 $r=(A,B)$；若 B 是开的，则实数 (A,B) 称为无理数；若 $c=(A,B)$ 与 $c'=(A',B')$ 是两个实数，当且仅当 $A=A'$ 时，称此二实数相等，记成 $c=c'$。

现代数学中尚无一般的办法来判定任给的一个实数 (A,B) 是否为无理数，即没有办法确定 A 与 B 皆是开的。

定义 2 若 $c=(A,B)$ 与 $c'=(A',B')$ 是两个实数，而 A 是 A' 的真子集，则称 c 小于 c'，记成 $c<c'$。

定义 2 中的"$<$"具有传递性，即 $c_1<c_2$，$c_2<c_3$，则 $c_1<c_3$，其中 c_1,c_2,c_3 是 3 个实数。

不难看出，$c_1\neq c_2$，则 $c_1<c_2$ 或 $c_1>c_2$ 二者必居其一。

可以证明：

①实数集合是有理数集与无理数集的并。

②实数集合是有序集合。

③任何不等的实数之间有无穷个有理数。

在 (A,B) 中，A 与 B 皆开的情形，无理数 (A,B) 填充了下子集 A 与上子集 B 之间的间隙（漏洞），全体实数集合就不存在任何漏洞了，实数集已不再需要有理数与无理数之外的新数种来填补漏洞，这就是我们所说的实数集 $\mathbb{R}$ 是一个"连续系统"，简称"连续统"。戴德金等人的工作基本上解除了第一次数学危机。当然，实数理论中的遗留问题还有不少，例如连续统假设问题。

2 三大几何作图问题

希腊是几何的故乡,公元前 5 世纪,雅典城成立了一个所谓“诡辩学派”,或曰“智人学派”,主要代表人物有希比阿斯(Hippias)、安提丰(Antiphon),诡辩学派的成员提出并参与研究了下面 3 个几何作图问题:

只许用圆规和无刻度直尺求作:

(1)三等分任意一个角(三等分角)。

(2)作一立方体,使其体积是已知立方体体积的 2 倍(倍立方)。

(3)作一个正方形,使其面积等于已知圆的面积(化圆为方)。

这 3 个貌似初等的平面几何问题,从提出之后的 2000 多年间,全世界许多数学家对它投入了极大的热情与精力,直到 19 世纪才得以解决,严格证明:

只用圆规与无刻度直尺,上述三大几何作图问题不可能完成。

证明其不可能性用的数学手段不是几何的而是代数的,看起来,一个数学问题的提出,可能超越当年数学发展水平几千年,只有等到数学的整体水平发育到足够有力时,才能把千年的遗难问题彻底解决;而且,可能是从一个学科提出的问题,却被另一个或另几个学科的理论与方法解决,正所谓他山之石,可以攻玉。

公元前 5 世纪,希波克拉底(Hippocrates of Chioe)解决了“化月牙为方”的问题:

以一个圆的两条垂直直径的端点连线为直径画一个圆,对于在大圆之外小圆之内的部分(月牙),可以用无刻直尺与圆规作一个正方形,使其与月牙面积相等。

事实上,在图 2.6 中,BC 是$\odot O$ 的直径,$AO\perp BC$,于是 $AB=\sqrt{2}r$,r 是$\odot O$ 半径。O' 是 AB 中点,$\odot O'$ 以 AB 为直径,则$\odot O'$ 的面积是$\odot O$ 面积之半,于是$\odot O'$ 的半圆之面积等于$\odot O$ 上扇形 ABO 面积,所以

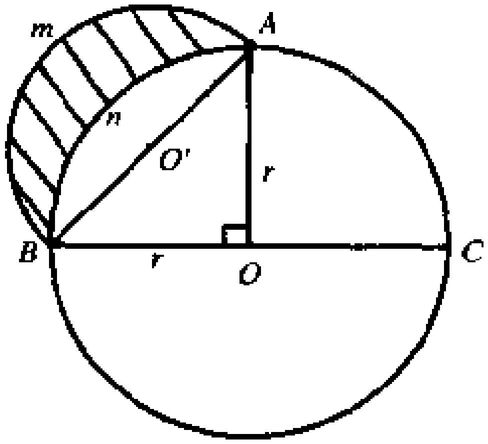


图 2.6

月牙 $AmBnA$ 的面积 = △ AOB 的面积，而△ AOB 可以用圆规和直尺化成一个等面积的正方形，所以月牙 $AmBnA$ 可以用规尺化成等面积的正方形。

表面上看，化月牙为方未必比化圆为方简单，至少两者有相似之处，但难度上这两个问题却有天壤之别；上面已经用初等的办法解决了用规尺"化月牙为方"的问题，而"化满月为方"的问题却十分之艰深。

为讲清"化圆为方"，还得从超越数谈起。

若 ξ 是有理系数代数方程

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

的根，则称 ξ 为代数数，不是代数数的复数为超越数。

1882 年，德国数学家林德曼证明 π 是超越数，从而$\sqrt{\pi}$也是超越数。

回到化圆为方问题，设欲作的正方形边长为 x，已知圆的半径为 1，则正方形一边的长 x 应满足方程

$$x^2 = \pi$$

从而 $x = \sqrt{\pi}$。

但是，下面将证明一个线段能用无刻直尺和圆规作出的充分必要条件是这个线段的长能用给定线段的长施行有限次 +、-、×、÷ 及正数开平方 5 种运算得出，今我们只知一条长 1 的线段，

由 1 用有限次 +、-、×、÷ 及开平方只能得出代数数，得不出超越数$\sqrt{\pi}$，所以化圆为方用无刻直尺与圆规是不可解的。

诡辩派的代表人物安提丰提出下面的所谓"穷竭法"来化圆为方：

从圆的内接正方形开始，边数不断加倍得圆的内接正八边形、正十六边形、正三十二边形、…、正 2^n 边形($n \geq 2$)。对圆的内接正多边形，可以用圆规直尺作一个面积相等的正方形，而 n 越大，圆的内接正 n 边形的面积越接近圆的面积，最后(穷竭)圆的内接正多边形与圆重合，安提丰认为如此即得出一个与圆等面积的正方形。

事实上，按安提丰的思路是不能实现化圆为方的，因为这需要无穷步骤的内接正多边形边数加倍的过程。但他的想法中含有可贵的朴素的极限概念。例如他的想法中含有单调上升有界序列有极限的道理，圆内接正多边形序列的周长单调上升，但总超不过圆的周长，所以这个序列有极限。但这一个极限存在定理是两千多年后才在近代数学分析当中严格证明而确立的。至于为什么内接正多边形周长序列的极限就是圆的周长，则是在近代数学分析建立了严格的"$\varepsilon-\delta$"和"$\varepsilon-N$"极限定义之后才严格证明的。事实上圆的内接正 n 边形的周长为(见图 2.7)

$$S_n = 2n\sin\alpha$$

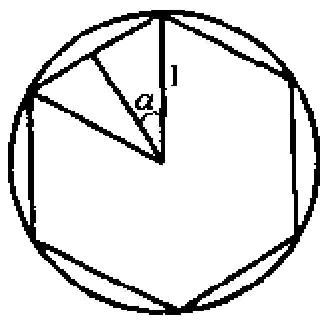


图 2.7

其中设圆的半径是 1，$\alpha = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$。于是圆的内接正 n 边形周长 S_n 与圆周长 C 之比为

$$\frac{S_n}{C}=\frac{2n\sin\frac{\pi}{n}}{2\pi}=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{C}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=1$$

即安提丰所说的穷竭法中，当圆内接正 n 边形的边数无限增大时，其周长就变成了圆周长，这种朴素的极限思想在中国刘徽与祖家父子求 π 的近似值时也是视为其理论基础的。可惜中希两国的这些大牌数学家都未把它发展成像样的极限理论，由于历史条件的局限，我们自不应苛求于古人。毕竟他们的这种光辉的思想是后人搞严格的极限理论的渊源，中希古代数学家的穷竭思想功不可没。

关于倍立方，古希腊人对这一问题赋予了一层神秘的色彩，传说希腊开奥斯岛上有一座阿婆劳神庙，有一年，岛上瘟疫流行，人心惶恐，纷纷求拜巫神，巫神欺骗无知人群，胡说如果把立方体祭坛的体积扩大成原来两倍的立方体祭坛，则可消灾灭祸；人们想不出解决这一问题的办法，就去请教当年最有学问的柏拉图，柏拉图也解不出来。

这个问题的数学模型是：用无刻直尺与圆规作一线段，使其长度满足方程

$$x^3=2$$

对于三等分角问题，起初人们对它似乎不屑一顾，用规尺等分一个角那么容易完成，三等分角似应不会太难。一个具体的问题是做正九边形，需要用规尺做一个 $40°$ 的角，它是 $60°$ 角三等分之后的两倍，一个角的两倍用规尺自然不难，但 $60°$ 角三等分怎么办？这个问题的根子极深，难度很大，尽管它表面上伪装得很简明。

规尺倍立方与三等分角是 1837 年由法国数学家旺策尔

(Pierre Wantzel)解决的，答案是不可解。

下面对旺策尔的答案略加介绍。

取平面直角坐标系 xOy，在第一象限作直角△ AOB，A 点在 x 轴上，$OA=1$，$\angle AOB=60°$，若能用规尺把$\angle AOB$ 三等分，即$\angle AOC=\angle COD=\angle DOB=20°$，其中 C 与 D 在AB 上，这相当于用规尺作了一条线段 OC，使得$\frac{1}{OC}=\cos 20°$，见图 2.8。

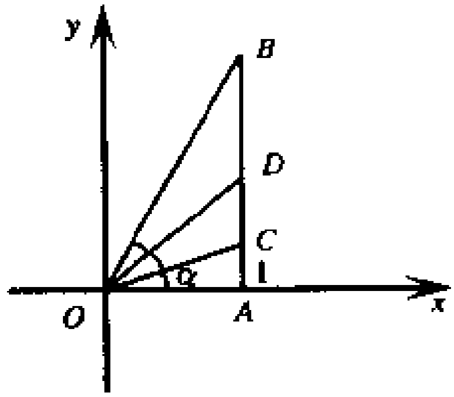


图 2.8

由棣美弗(A. De. Moiver, 1667—1754)定理得

$$(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)^3=\cos 3\varphi+\mathrm{i}\sin 3\varphi$$

另一方面

$$(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)^3=\cos^3\varphi+3\mathrm{i}\cos^2\varphi\sin\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi-\mathrm{i}\sin^3\varphi$$

于是

$$\cos 3\varphi+\mathrm{i}\sin 3\varphi=[\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi]+\mathrm{i}[3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi]$$

故得

$$\cos 3\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi$$

今取 $\varphi=20°$，且令 $\cos 20°=x$，则

$$\cos 60°=\cos^3 20°-3\cos 20°\sin^2 20°$$

$$\frac{1}{2}=\cos^3 20°-3\cos 20°(1-\cos^2 20°)$$

$$\frac{1}{2}=x^3-3x(1-x^2)$$

$$8x^3-6x-1=0 \tag{2.1}$$

于是三等分 60°角的问题变成方程(2.1)是否存在这样的实根,它是由 0,1,经有限次 +、-、×、÷(除数非零)和正数开平方得出的那种实数,这种数作为一条线段的长度,此线段可以用规尺作出,这种数称为"规尺数"(长 1 的线段是已知的)。

例如整环中的数是规尺数,有理数域$\mathbb{R}_0$中的数是规尺数。"规尺数"的范围还可以扩大。

下面域中的数皆规尺数:

把已知线段 $a,b,c,\cdots$(长 1 的线段是已知的)的长度添加到$\mathbb{R}_0$中得$\mathbb{R}_1$。

若 $k_1\in\mathbb{R}_1$,但$\sqrt{k_1}\notin\mathbb{R}_1$,则把$\sqrt{k_1}$添加到$\mathbb{R}_1$中得$\mathbb{R}_2$。

若 $k_2\in\mathbb{R}_2$,但$\sqrt{k_2}\notin\mathbb{R}_2$,则把$\sqrt{k_2}$添加到$\mathbb{R}_2$中得$\mathbb{R}_3$。

依此类推得$\mathbb{R}_1,\mathbb{R}_2,\cdots,\mathbb{R}_n$,称$\mathbb{R}_n$是$\mathbb{R}_{n-1}$的扩张域。

我们看出,从已知线段 $a,b,c,\cdots$ 出发,用圆规和直尺可以作出其长属于这种扩张域的每一线段。

更为重要的结论是:从已知线段 $a,b,c,\cdots$ 出发,用圆规直尺可以作出的线段之长,一定属于某个$\mathbb{R}_n$,n 是自然数。

下面证明这个重要结论的正确性。

(1)若(x_1,y_1)与(x_2,y_2)是两个点的平面直角坐标,且 x_1,x_2,y_1,y_2 属于某一扩张域。则过此两点的直线为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$(y_2-y_1)x+(x_1-x_2)y+(x_2y_1-x_1y_2)=0$$

这个直线的方程之系数属于扩张域。

如果两条直线

$$Ax+By+C=0,A'x+B'y+C'=0$$

的系数属于扩张域,则两直线的交点

$$\left(x_0=\frac{C'B-B'C}{AB'-BA'},y_0=\frac{A'C-AC'}{AB'-BA'}\right)$$

是扩张域中的数。

由此可知,从已知线段出发,用直尺作出的线段之长属于扩张域。

(2)设(x_1,y_1),(x_2,y_2)是其坐标是扩张域中的数的两点,则两点的距离

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

是扩张域中的数,线段 d(指长 d 的线段)的作出要用圆规。

以(x_1,y_1)为中心,以(x_1,y_1),(x_2,y_2)为端点的线段为半径作圆,则圆的方程是

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

$$x^2+y^2-2x_1x-2y_1y-x_2^2+2x_1x_2-y_2^2+2y_1y_2=0$$

这是一个系数属于扩张域的方程。

两圆

$$\begin{cases}x^2+y^2-ax-by+c=0\\x^2+y^2-a'x-b'y+c'=0\end{cases}$$

的交点是(如果有)形如

$$p+q\sqrt{s}$$

的一个数,其中 p,q,s 皆属于扩张域,于是两圆交点属于扩张域。

求两个圆的交点,等价于解方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2-ax-by+c=0\\(a'-a)x+(b'-b)y+(c-c')=0\end{cases}$$

由此可知圆与直线的交点的坐标也是扩张域中的数。同理两圆或圆与直线之交点的距离也是扩张域中的数。

综上所述,用圆规与直尺,从已知线段出发,能作的线段之长一定属于某一扩张域。

进而得到下述命题:一条线段能用规尺作出的充要条件是此线段之长可被已知线段的长用有限次+、-、×、÷和$\sqrt{\ }$来算出,即此线段长是规尺数。

倍立方与三等分角的问题都归结为一个三次方程的根能否用

规尺作出。下面给出了一个与一元三次方程的有关定理。

定理 1 若有理系数的三次方程

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.2}$$

没有有理根,则它的每个根都不能用规尺作图作出来(一条线段的长恰是此根)。

证 假设此三次方程的一个根 x 可以用规尺作图(指作一个长为 x 的线段),那么存在最短的扩张域序列

$$R_0, R_1, R_2, \cdots, R_{n-1}, R_n \tag{2.3}$$

$x \in R_n$,但 $x \notin R_{n-1}$,并且没有一个根属于 R_{n-1}。因为如果有任何一根属于 R_{n-1},则可以用此根替代上述的根 x,从而使上述序列(2.3)缩短,另外,序列(2.3)不能只是一项 R_0,因为已知此方程无有理根。因此根 $x \in R_n$, n 最小时也有 $n \geqslant 1$。可以假设

$$x = p + q\sqrt{k_{n-1}}$$

其中 $k_{n-1} \in R_{n-1}$, p、$q \in R_{n-1}$,而$\sqrt{k_{n-1}} \notin R_{n-1}$。

下证若 $x = p + q\sqrt{k_{n-1}}$是三次方程(2.2)的根,那么 R_n 中的数

$$y = p - q\sqrt{k_{n-1}}$$

也是这个方程的根。

事实上,由于 $x \in R_n$,所以 x^3、$x^2 \in R_n$,因而

$$x^3 + ax^2 + bx + c \in R_n$$

于是由 $x = p + q\sqrt{k_{n-1}}$得

$$x^3 + ax^2 + bx + c = r + s\sqrt{k_{n-1}}$$

其中 r、$s \in R_{n-1}$。容易算出

$$y^3 + ay^2 + by + c = r - s\sqrt{k_{n-1}}$$

又 x 是三次方程的根,所以

$$r + s\sqrt{k_{n-1}} = 0$$

若 $s \neq 0$,则$\sqrt{k_{n-1}} = -\frac{r}{s}$,于是$\sqrt{k_{n-1}} \in R_{n-1}$,这与上述$\sqrt{k_{n-1}} \notin$

R_{n-1}矛盾。所以 $s=0$,进而 $r=0$,再进而 $r-s\sqrt{k_{n-1}}=0$,得到

$$y^3+ay^2+by+c=0$$

即 $y=p-q\sqrt{k_{n-1}}$也是根。

$x=p+q\sqrt{k_{n-1}}\neq y=p-q\sqrt{k_{n-1}}$,不然 $x-y=2q\sqrt{k_{n-1}}=0$,这时 $q=0$,于是 $x=p\in R_{n-1}$,这与前面已知的 $x\notin R_{n-1}$不符。可见 x 与 y 是相异的根;由韦达定理,若 x_1,x_2,x_3 是 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的 3 个根,则

$$x_1+x_2+x_3=-a$$

$$x_3=-a-x-y=$$
$$-a-2p\in R_{n-1}$$

与前面说的此三次方程没有一个根属于 R_{n-1}相违,这一矛盾反证了定理 1,证毕。

容易证明

$$x^3-2=0 \tag{2.4}$$

没有有理根,事实上,若式(2.4)有有理根 $x=\frac{q}{p}$,$\frac{q}{p}$是既约分数,则 $\frac{q^3}{p^3}=2$,$2p^3=q^3$,从而 q 是偶数,令 $q=2k$,$(k\neq 0)$,则 $2p^3=8k^3$,$4k^3=p^3$,于是 p 是偶数,设 $p=2l$,$l\neq 0$,于是$\frac{q}{p}$不是即约分数,矛盾。

由定理 1,用无刻直尺与圆规不能倍立方。

对于三等分角,它相关的方程为

$$8x^3-6x-1=0$$

令 $z=2x$,则方程化成

$$z^3-3z=1 \tag{2.5}$$

设式(2.5)有有理根 $z=\frac{q}{p}$(既约分数),$p,q\neq 0$。于是

$$\frac{q^3}{p^3}-3\frac{q}{p}=1$$

$$q^3-3p^2q=p^3,q^3=3p^2q+p^3$$

即 p^3 能被 q 除尽，q^3 能被 p 除尽，于是如果 $q\neq\pm1$ 时，则 p 与 q 有非 1 的公因子；$p\neq\pm1$ 时，则 p,q 有非 1 的公因子，这与$\frac{q}{p}$为既约分数相违，所以只能是 $p=\pm1,q=\pm1$，从而 $z=\pm1$，但 $z=\pm1$ 不满足式(2.5)，矛盾，此矛盾证明式(2.5)没有有理根，从而 $8x^3-6x-1=0$ 也无有理根，由定理 1，用圆规直尺不能三等分任给的角。

还有一个与三等分角相关的希腊古代难题如下：

$\forall n\in\mathbb{N}$，能否用圆规直尺作出一个圆的内接正 n 边形？（正多边形问题）。

用规尺作正多边形问题的实例可以是肯定的，例如内接正四边形，正五边形，正六边形，正八边形，正十边形等，但是正七边形与正九边形呢?!

由于 60°角不能规尺三等分，即规尺作不出 20°角，等价于作不出 40°角，所以用规尺作不出内接正九边形，从而正十八边形，正三十六边形等不可用规尺作出。

高斯(1777—1855)19 岁时解决了正多边形问题。高斯的定理如下：

定理(Gauss) $n\geqslant3,n\in\mathbb{N},n=2^{\alpha}p_1p_2\cdots p_s$，整数 $\alpha\geqslant0,p_1,p_2,\cdots,p_s$ 是两两相异的费马素数(即 p_i 是素数，且 $p_i=2^{2^t}+1,t\geqslant0$，$t$ 是整数)当且仅当用规尺可以作出正 n 边形。

$t=0,1,2,3,4$ 时费马素数 $p=2^{2^t}+1$ 分别为 3，5，17，257，65537。这时取 $\alpha=0,s=1,p_1=2^{2^2}+1$，则知正十七边形可以用规尺作出，而且高斯亲自用规尺真地画出了一个正十七边形；高斯去世后，哥廷根大学修筑了一个巨大的正十七边形为底的棱柱台座，上面安放着高斯的雕像。

11 与 13 不是费马素数，所以不能用规尺作出正十一边形和正十三边形。

$2^{2^5}+1$ 有因数 641(欧拉求得)，因此正 $2^{2^5}+1$ 边形不可用规尺作出。俄国数学家别尔乌辛求得 $2^{2^{12}}+1$ 有因数 114689，$2^{2^{23}}+1$ 有

因数167772161;目前还不知道费马素数是否有无穷多个。

顺便提醒一句,时至今日,由于不了解数学史的原因或信不过上述论证,仍然有一些过份自信的数学爱好者在妄费心机地用圆规直尺作上述三大作图问题,这是很不理智的行为,应予劝阻。

我们看到,若是没有解析几何、近世代数和数论等近现代数学学科的出现,硬是用初等数学去解决这三大作图问题,将会浪费多少聪明人的精力! 数学理论与"论证数学"的价值从三大作图问题上体现得十分突出。"论证数学"是希腊对人类文明做出的重大贡献。

古希腊人重视理论和逻辑,他们提出的问题从纯数学上来看十分之刁钻和有趣,三大几何作图题就是他们思维特点的集中表现,为什么非得限制只用圆规直尺去作图呢? 这似有钻牛角尖之嫌,但正是这种限制性的问题,强制人千方百计从理论上去思考,从而以此为契机,寻找出许多数学的新成果,三大几何作图问题是数学中又一只会下金蛋的鹅。

如果取消只用规尺的限制,三大作图问题则会得到肯定的解答。

(1)倍立方。法国数学家韦达(Viete Franois,1540—1603)和英国科学家牛顿给出倍立方的方法如下。

已知线段 AB,欲作线段 AC,使得 $AC^3=2(AB)^3$:

①作$\angle ABM=90°$,$\angle ABN=120°$,如图 2.9 所示。

②作直线 AD,交 BM 于 C,交 BN 于 D,在直尺上标志与 AB 等长的线段$A'B'$,作直线 AD 时,调整直尺的方位,使 $CD=A'B'$。则 AC 即为所求。

事实上,设 $AB=a$,$AC=b$,$BC=c$,$\angle ADB=\theta$,在$\triangle ABD$ 中,由正弦定理得

$$\frac{a}{\sin\theta}=\frac{a+b}{\sin120°}$$

$$\frac{a}{a+b}=\frac{\sin\theta}{\sin120°} \tag{2.6}$$

在$\triangle BCD$ 中,由正弦定理得

$$\frac{c}{\sin\theta}=\frac{a}{\sin30°}$$

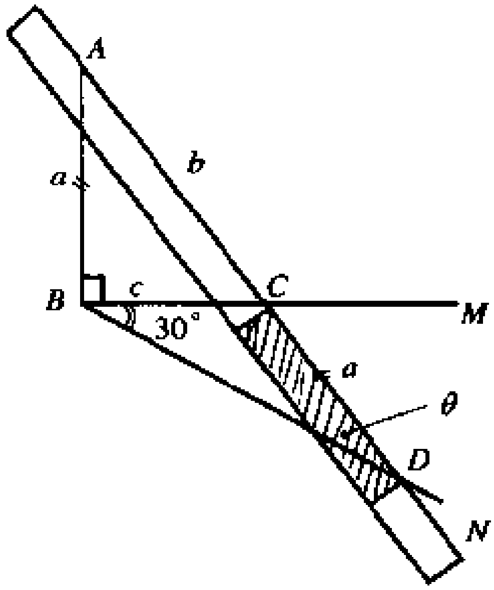


图 2.9

$$\frac{a}{c}=\frac{\sin 30^\circ}{\sin\theta} \tag{2.7}$$

式(2.6)×式(2.7)得

$$\frac{a^2}{c(a+b)}=\frac{\sin 30^\circ}{\sin 120^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

又 $c^2=b^2-a^2$,得

$$\frac{a^4}{(b^2-a^2)(a+b)^2}=\frac{1}{3}$$

$$2a^3(2a+b)=b^3(2a+b)$$

即得

$$2a^3=b^3,2(AB)^3=(AC)^3$$

古希腊的希波克拉底(Hippocrates of Chios)在公元前约 400 年把倍立方问题化成求 x,使得

$$s:x=x:y=y:2s \tag{2.8}$$

如果能求得长 x 的线段,则 $x^3=2s^3$,即 x 为棱长的立方体体积是已知立方体(棱长为 s)的体积的 2 倍。事实上若

$$s:x=x:y=y:2s$$

则 $x^2=sy$, $y^2=2sx$, $x^4=s^2y^2=s^2 2sx$,于是得

$$x^3 = 2s^3$$

古希腊的欧托修斯(Eutocius)利用木工方尺解决了式(2.8)中由 s 求 x 的问题。

考虑两个直角三角形△ CBA 和△ DAB,处于公共直角边 AB 的同侧,$\angle ABC = \angle BAD = 90°$,见图 2.10。

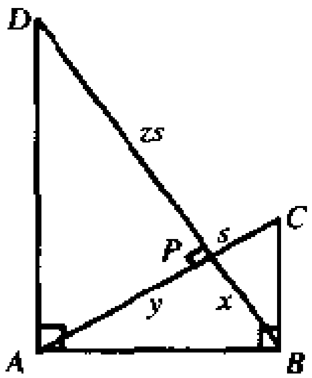


图 2.10

且 $AC \perp BD$,交于 P 点。于是

$$\triangle CPB \backsim \triangle BPA \backsim \triangle APD$$

从而

$$\frac{PC}{PB} = \frac{PB}{PA} = \frac{PA}{PD}$$

如果 $2PC = PD$,PC 为已知线段,则 $PB^3 = 2(PC)^3$。

为此,作两条垂直交于 P 的直线,在两直线上分别截取 PC 和 PD,使 $PD = 2PC$,然后拿来木工方尺和一个三角板 UVT,V 是直角顶点,方尺的内缘直角顶为 S,调整方尺与三角板的方位,使得

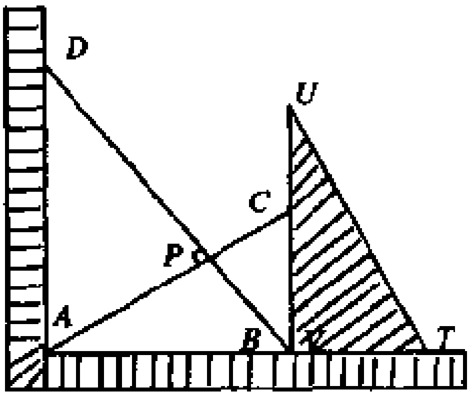


图 2.11

CP 的延长线过 S 点，D 点在方尺内缘上，三角板的直角边 VT 在方尺内缘上滑动，另一直角边上有点 C，且 V 点恰在 DP 的延长线上。则 PV 即为所求，见图 2.11。

(2)三等分角。大约公元前 240 年，阿基米德(Archimedes，公元前 287—公元前 212)给出一个巧妙的三等分角的方法。

已知圆心角$\angle AOB$，过 B 作直线 BCD，交圆于 C，交 AO 延长线于 D，使得 $CD = OA$，则$\angle ADB = \frac{1}{3}\angle AOB$，怎样使 $CD = OA$ 呢？只需在直尺上标志一段 $O'A' = OA$，再调整直尺的方位，使得尺的边缘过 B 点，且 $CD = O'A'$。见图 2.12。

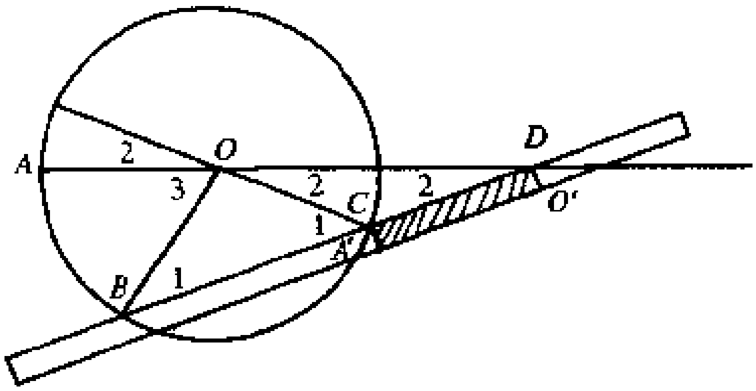


图 2.12

事实上，连 OC，则$\angle 1 = 2\angle 2$，又$\angle 1 = \frac{1}{2}(\angle 2 + \angle 3)$，$2\angle 2 = \frac{1}{2}(\angle 2 + \angle 3)$，故得$\angle 3 = 3\angle 2$，即得到了已知角$\angle 3$ 的$\frac{1}{3}$。

阿基米德定义了所谓阿基米德螺线：射线绕其端点在平面上匀角速转动，从端点出发一动点沿此射线匀速运动，此动点在平面上的轨迹即为阿基米德螺线。

设圆心角$\angle AOB$ 已知，射线原位置为 OA 方向，l 为阿基米德螺线，它与 OB 交于 P 点，P_1，P_2 是线段 OP 的三等分点，以 OP_1，OP_2 为半径以 O 为圆心分别作圆，与$\angle AOB$ 内部的阿基米德螺线交于 T_1，T_2，则 OT_1，OT_2 把$\angle AOB$ 三等分，见图 2.13。

(3)化圆为方。阿基米德螺线可以化圆为方，事实上，设 $r =$

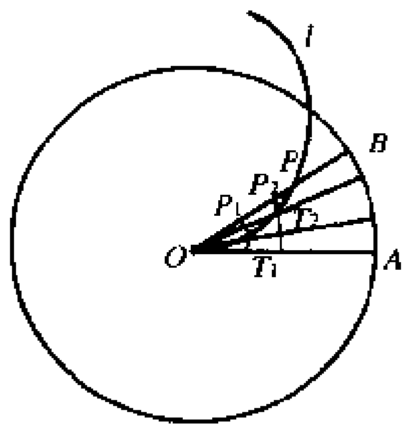


图 2.13

$a\theta$ 是阿基米德螺线，以 a 为半径作圆，则图 2.13 中 $\overset{\frown}{AB} = a\theta = OP$，取 $OP \perp OA$，则 $\overset{\frown}{AB}$ 之长是圆周长的 $\frac{1}{4}$。设圆面积为 K，则

$$K = 4(OP) \cdot \frac{a}{2} = (2a) \cdot OP$$

设所求的与圆等面积的正方形的边长为 x，则

$$x^2 = 2a \cdot OP$$

x 是 $2a$ 与 OP 的比例中项，可求得。

公元前 425 年，智人学派的希皮阿斯发明了一种所谓“割圆曲线”，用以化圆为方。

设单位圆的动半径从 OC 向 OA（$OC \perp OA$）作均速旋转，转过 90°角，见图 2.14。同时平行于 OA 的直线 MN 均速向 OA 平移，动

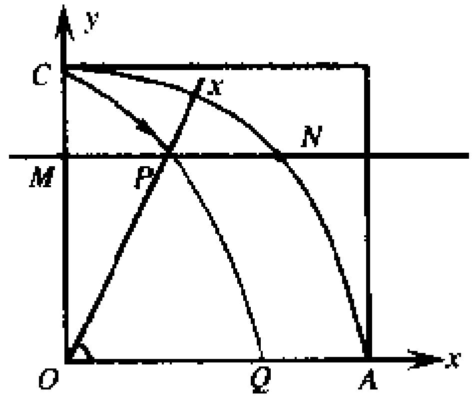


图 2.14

半径与动直线 MN 之交点 P 之轨迹称为割圆曲线。设割圆曲线与 OA 交点为 Q，则线段 $OQ=\frac{2}{\pi}$。

事实上 $OM=k$ 时，$\angle AOP=k\frac{\pi}{2}$，所以若建立直角坐标系 xoy，(x,y)是 P 点坐标，则

$$y=k=x\operatorname{tg}\frac{k\pi}{2}=x\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}$$

于是

$$x=\frac{y}{\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}}$$

当 $y\to 0$ 时，P 是趋于 Q 点，所以

$$OQ=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

我们能找到$\frac{2}{\pi}$长的线段 OQ，从而可以作出长$\sqrt{\pi}$的线段，即可以化圆为方。

3　柏拉图学派、亚力山大学派和数学的逻辑化

柏拉图(Plato，公元前 427—公元前 347)，贵族出身，是希腊著名哲学家。他热衷于数学，被誉为他那个时代最有学问的人。公元前 407 年，20 岁的柏拉图拜年逾花甲的苏格拉底为师，是苏格拉底最出色的学生。公元前 399 年，苏格拉底被雅典民主政权处死，柏拉图开始为期 12 年的流亡生涯，到过埃及等数学文化发达的地区。公元前 387 年，柏拉图以万贯家财创办雅典学院。他认为数学是一切学问的根基，雅典学院大门的横额上写道："不懂几何者，不得入内。"柏拉图具体的数学成果并不多，但他倡导演绎推理，对数学的研究方法贡献颇多，例如他是最早使用反证法的人。

柏拉图以雅典学院为基地，建立了柏拉图学派，柏拉图的最优秀的学生是亚里士多德。

亚里士多德（Aristotle，公元前 384—公元前 322）指出数学定义链中有无定义的所谓原始定义，他还指出数学推理时命题链的出发点是公理与公设，使数学推理规范化和系统化，从而创立了独立的逻辑学。他给出了矛盾律与排中律，矛盾律的核心是一个命题不能同时是真的又是假的；排中律则是说一命题或真或假二者必居其一，这两条逻辑原理成了数学中间接证明（例如反证法）的逻辑基础。欧几里得曾就学于雅典学院，上述亚里士多德的形式逻辑为欧几里得几何体系的形成奠定了思想与逻辑基础。亚里士多德被誉为古希腊“最博学的人”和“最伟大的思想家。”

亚里士多德是著名的所谓“亚里士多德三段论”的创始人，他的著名逻辑命题流行于全世界：

“所有的人都是要死的，
苏格拉底是人，
所以苏格拉底也是要死的。”

要知道苏格拉底是他的老师柏拉图的恩师，他如此直接了当地议论师爷的死，似有不恭，但他却能逻辑地证明这个命题是真的（事实当然也是如此），柏拉图称赞亚里士多德是“本学派的精英”。

从公元前 338 年，希腊地区被马其顿统一到公元前 30 年，希腊的托勒密王朝被罗马消灭为止，是希腊数学史上的鼎盛时期。这一时段，希腊的数学中心从雅典移到亚力山大城，此城以马其顿君主亚力山大大帝命名，托勒密王朝就定都在亚力山大城。在公元前 3 世纪，亚力山大城修建了宏伟的博物馆和图书馆，欧几里得、阿基米德和阿波罗尼奥斯三大数学家在亚力山大城组成亚力山大学派，他们的学派在数学上为全人类做出了极其伟大的成就。

阿基米德与牛顿、高斯合称世界三大数学家，阿基米德更被尊为“数学之神”。

欧几里得（Euclid，公元前 330—公元前 275），生于雅典，是希腊几何学的集大成者，他继承了泰勒斯、毕达哥拉斯学派以及柏拉

图学派的“论证数学”和逻辑化思想,从年轻时代起就打上了重证明和公理化、逻辑化的希腊式数学的烙印,治学严谨,为数学(理论)而数学,鄙视功利和投机取巧的学风。据史书记载,有一位学生跟欧几里得学了点几何知识,就奈不住性子问老师学完几何有什么好处,欧几里得愤然命令侍者道:“快给这位学生三枚钱币,让他走!”由于欧几里得在几何学方面的成就不凡,托勒密国王邀请他客居亚力山大城,国王也谦恭地向欧几里得学习几何。在亚力山大城,欧几里得潜心著书立说,终于写出数学史上里程碑式的鸿篇巨著《原本》。我国徐光启于1606年把《原本》译成中文,中文版书名译成《几何原本》。

《原本》的内容与特点,以及在数学中的作用,我们后面设专章加以介绍和评述。

《原本》破天荒地采用了最科学的数学写作方式,首先提出公理和公设系统,再写定义与定理,定理皆给出严格证明,内容十分丰富。全书共13卷(第十四、十五两卷为后人所补),5条公理,5条公设,119个定义,465个命题及其证明,是历史上第一个公理数学系统,成了后世数学科学的样板,其影响超过了至今任何一部数学著作,至今出版发行了1000版以上;各国现行中学几何课本基本上是照抄法国数学家拉格朗日(Lagrange,1736—1813)译《几何原本》的改写本。

《几何原本》和两千年之后诞生的牛顿力学是人类科学史最为庄严、最为完备和影响最为深远的两座科学高峰。英国哲学家罗素在《西方哲学史》一书中说:“欧几里得的《几何原本》毫无疑义是古往今来最伟大的著作之一,是希腊理智最完美的纪念碑。”

欧几里得的数学思想亦有偏颇之处,例如他明显地不重视数学的应用,《原本》全书无一个与实际有直接联系的问题,视理论数学为高雅文化,视应用数学为“奴隶数学”,表现出典型的古希腊数学的片面性,与古代中国数学恰为两个极端。如果两者相反相成,那就是最佳境界。早在元朝时代(约1275年),《原本》通过阿拉伯人第一次传入中国,而且据说有一个译本,但由于当时统治者的无

知和当时中国数学家对理论的兴趣不高，不久便失传了。17 世纪和 19 世纪，先后由徐光启、李善兰与外国人合作完成了《原本》的中文翻译。

欧几里得还有一些著作，可惜大都失传，例如《二次曲线论》，这部书虽已失传，但它的主要内容被大数学家阿波罗尼奥斯吸收编入其所著《圆锥曲线》而流传至今。

阿基米德（Archimedes，公元前 287—公元前 212），希腊数学力学家，生于西西里岛的叙拉古地区，是欧几里得的门生，是人类历史上最伟大的科学家之一。美国的科学史家 E.T. 贝尔（Bell）在《数学人物》一书中写道："任何一张开列有史以来三位最伟大的数学家的名单上，必定写有阿基米德的名字，另两位通常是牛顿和高斯，不过以他们的宏伟业绩和所处的时代背景来比较，或拿他们影响当代和后代的深邃和久远来比较，还应首推阿基米德。"大作家伏尔泰（Voltaire）评述说："阿基米德头脑里的想象力比荷马头脑里的要多。"

阿基米德的父亲是数学天文学家，是叙拉古王亥厄洛（Hieron）的亲戚。阿基米德从少年时代起就在父亲的辅导之下钻研《原本》，后又成了亚力山大学派的成员。

1965 年，西西里岛上修建一个旅馆，挖地基时发现了阿基米德的坟墓，这是考古史上一次重大的世界级宝贵文物的出土。阿基米德的墓碑上刻着一个球及其外切圆柱，这是他的名著《球与圆柱》中的代表图示。

阿基米德在《圆的度量》一书中用"穷竭法"证明了圆的面积是该圆周长与半径乘积之半。

他的证明如下：

设 K 是以圆半径与周长为两直角边的直角三角形的面积，$ABCD$ 是圆的内接正方形。

（1）若 K 小于圆的面积。把内接正多边形的边数加倍的办法从正方形 $ABCD$ 出发得到内接正八边形，内接正十六边形等，继续下去，直到内接正多边形各边所对的弓形面积之和小于圆面积减

去 K 所得的差,即圆面积减去 K 大于圆的面积减去内接正多边形面积;至此,所得内接正多边形面积大于 K。

另一方面,这个多边形的周长小于圆的周长,这个多边形的边心距小于圆的半径,于是这个多边形的面积应小于 K,矛盾。故圆的面积不大于 K。

(2)若 K 大于圆的面积。作圆的外切正方形 $A'B'C'D'$,把 $\overset{\frown}{A'B'}$,$\overset{\frown}{B'C'}$,$\overset{\frown}{C'D'}$,$\overset{\frown}{D'A'}$ 等分,以分点为切点作圆的切线,把正方形 $A'B'C'D'$ 切掉四角上的 4 个三角形,得到圆的外切正八边形,如此再做圆的外切正十六边形等,直到得到一个外切正多边形,此外切正多边形与圆所夹的面积小于 K 与圆面积之差,从而这个外切正多边形的面积小于 K。

另一方面,此多边形的周长比圆周长大,而这个多边形面积是圆半径与其周长积的一半,可见此多边形面积比 K 大,矛盾。故圆的面积不小于 K,见图 2.15。

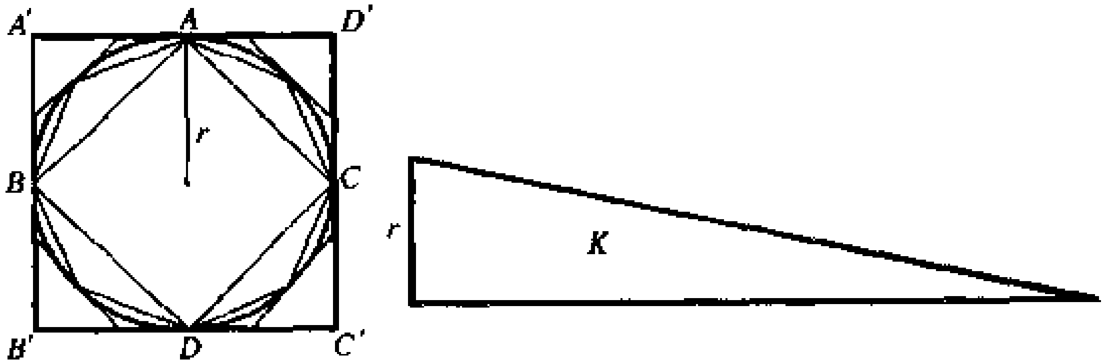


图 2.15

由(1)与(2),圆的面积等于 K,证毕。

在《图的度量》中,阿基米德用圆的外切与内接正 96 边形求得

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

这是数学史第一次明确指出 π 的误差限度的 π 值,且创立了割圆法求 π。

在阿基米德所著《抛物线图形求积法》中,他用与求圆面积相似的穷竭法思想求得抛物线与一直线相交围成的面积是同底等高

三角形面积的$\frac{4}{3}$,见图 2.16。即图 2.16 中抛物线弓形 $BmAnC$ 的面积是$\triangle ABC$ 面积的$\frac{4}{3}$,$BmAnC$ 与$\triangle ABC$ 的高皆为AD。

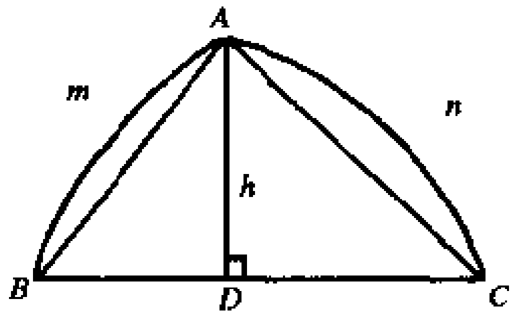


图 2.16

在《论球与圆柱》中,阿基米德用穷竭法得出下面的重要成果:

(1)球面面积是其大圆面积的 4 倍。

(2)球的体积是外切圆柱体积的$\frac{2}{3}$。

(3)球面面积是外切圆柱表面积的$\frac{2}{3}$。

在《方法论》一书中,阿基米德得出牟合方盖的体积是其外切立方体体积的$\frac{2}{3}$。

在阿基米德的工作中,其技巧之精彩,其论证之严格,令人叫绝。M. 克莱因评价道:“他(阿基米德)的严格性比牛顿与莱布尼兹著作中的高明得多。”莱布尼兹则说:“了解阿基米德和阿波罗尼奥斯的人,对后代杰出人物的成就就不会那么钦佩了。”

阿基米德作为数学力学家,经常把数学与力学结合起来解决数学难题或力学难题,例如他用数学—力学方法如下地求得球的体积:

考虑半径为 r 的球及其外切圆柱,另有一个高 $2r$ 的圆锥,其底面半径为 $2r$,其底面中心与圆柱底面中心重合,三者的轴截面如图 2.17 所示。

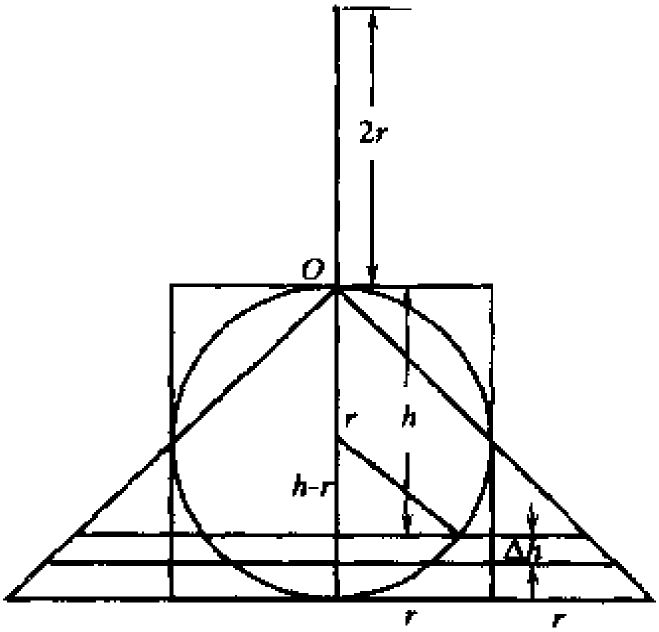


图 2.17

用两水平平面截下一片厚为Δh的薄片，此片的上面距圆柱上底为 h。

从球体上切下的一片体积近似为：$\pi h(2r-h)\Delta h$，

从柱体上切下的一片体积为：$\pi r^2\Delta h$，

从锥体上切下的一片体积近似为：$\pi h^2\Delta h$。

阿基米德把球体上的那一片与锥体上那一片挂在杠杆的一端，距支点 O 为 $2r$ 处，把柱体上切下的那一片的四倍挂在距支点为 h 的杠杆另一边，则杠杆恰平衡，即

$$2r(\pi h(2r-h)\Delta h+\pi h^2\Delta h)=4(\pi r^2\Delta h)h$$

把上述三立体水平切成许多薄片，则得

$$2r(V_{球}+V_{锥})=4rV_{柱}, \tag{2.9}$$

事实上，可以看成把锥体与球体的质点全集中到距支点 $2r$ 的左端点，而 4 倍重的圆柱插在杠杆的右侧，使杠杆与圆柱轴线重合，且支点落在圆柱底面上，此圆柱的质心在距支点为 r 的轴线上。

由式(2.9)得

$$2r\left[V_{球}+\frac{1}{3}\pi(2r)^2\cdot 2r\right]=4r\pi r^2 2r$$

$$2rV_{球}=8\pi r^4-\frac{16}{3}\pi r^4$$

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi r^3$$

阿基米德用他的穷竭法与杠杆平衡法求得了许多图形的面积和体积,这种思路与方法在他那里已经形成一个成熟的一贯的方法。我们可以看出,阿基米德这些方法实质上是极限思想和积分思想,这种思想与方法在他的许多著作中都有体现。

在名著《论螺线》中,阿基米德定义了所谓阿基米德螺线,他用这种螺线可以把任意角三等分。

阿基米德流传后世的著作很多,其中著名的有:《圆的度量》、《抛物线图形求积法》、《论螺线》、《论球与圆柱》、《论劈锥曲面与旋转椭球》、《方法》(处理力学问题的方法)、《引理书》、《论平面图形的平衡或其重心》、《浮体论》、《砂粒计数》、《牛群问题》。

研究希腊数学的权威希斯(T. Heath,1860—1941)在《希腊数学》中评论道:

"这些著作无一例外地都能视为数学论文的纪念碑。解题步骤的循循善诱,命题次序的巧妙安排,严格摈弃叙述的枝蔓及对整体的修饰润色,总之,给人的完美印象是如此之深,使读者油然而生敬畏之情。"

1631年《圆的度量》一书由意大利的传教士罗雅谷(J. Rho,1593—1638)翻译成中文传入中国,译名为《圆书》。

1962年,苏联出版了《阿基米德文集》,实际上它是可以找到的阿基米德的著作的全集。

阿基米德一反古希腊数学家轻视应用的陋习,他的许多著作都有直接的应用价值,例如他利用螺线理论发明了一种农用水车如图2.18。

这种抽水器还可以排除船舱中的积水或灌溉菜田,直到现在

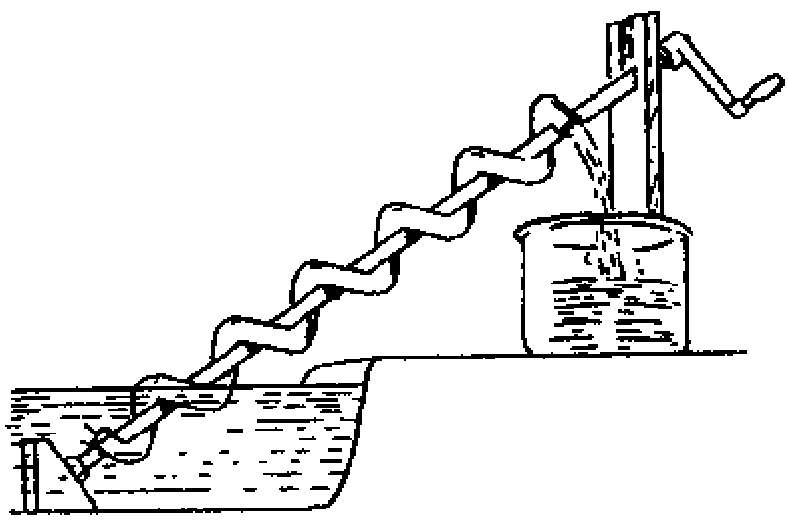


图 2.18

埃及还在用。

阿基米德重视应用，使得他从实践活动中领悟出重要的数学真理，他深有体会地说："力学便于我们发现结论，而几何则能帮助我们对结论作出证明。""一旦这种方法确立之后，有些人，或者是我们的同代人，或者是我们的后人，将会利用它发现我尚未想到的定理。"

阿基米德用上述方法除了搞出上述圆面积、球体积、抛物线与直线所围面积等成果外，还搞出下列一些重要结果：

(1)两个质心不同的量相减，剩余量的质心可以通过如下方法求得，连接整体量和减量质心的线段，且向整体量质心方向延长；使延长的线段之长与两重心间距离之比等于减量与剩余量质量之比，延长线的端点即剩余量之质心。

(2)如果一组量的质心均在同一条直线上，那么由这组量全体组合的量的质心将在相同的直线上。

(3)任一直线段的质心是该直线段的中点。

(4)三角形的质心是从角顶点到对边中点所作直线的交点。

(5)平行四边形的质心是对角线交点。

(6)圆的质心是圆心。

(7)圆柱的质心是轴的中点。

(8)圆锥的质心是划分轴的点，该点使轴上靠近顶点的那部分是靠近底的那部分的3倍。

这些命题是阿基米德由力学得出，又用几何严格证明了的。

关于阿基米德许多科学活动的趣闻轶事已是家喻户晓，例如他曾宣称："给我一个支点，我就可以移动地球。"这从理论上讲是成立的，当然由于所需的杠杆太长，移动地球是不可实现的事。阿基米德设计过一个滑轮组，据说叙拉古国王亲手用它移动了一艘巨大的三桅货船。还有脍炙人口的皇冠掺假案，是说国王希罗让工匠制做了一顶金冠，国王怀疑里面掺了银子，请阿基米德判定一下是否真的掺了假，阿基米德久思不得其解，一日阿基米德去洗澡，浴盆中的水被他的身体排出盆外，而他也顿感身体变轻，从中感悟出浮力定律：没入液体的物体减轻的重量等于该物排开液体的重量。他当即欣喜若狂，赤身冲出浴室，沿街呼叫"找到答案了。"

阿基米德在第二次布匿战争中被罗马士兵杀害。罗马人趁叙拉古人女神节狂欢之夜，偷袭成功。当夜阿基米德正在沙盘旁研究几何，敌士兵闯入，阿基米德不知大祸临头，还向这个目不识丁的士兵说不要弄乱他沙盘上的几何图，可恨那兵卒手起刀落，一位闻名千古的大数学家的天才头颅跌落在血泊之中，给人类科学事业造成了不可弥补的损失。

亚力山大学派第三号代表人物是当时公认的"大几何学家"阿波罗尼奥斯(Apllonius，约公元前262—公元前190)，出生于小亚细亚的泊尔加，他是欧几里得学生的学生。他得出 π 的近似值3.1416，他的成名作是6卷集的名著《圆锥曲线论》，这是一部以欧几里得《原本》为范例写成的严谨风格的巨著，内含487个命题，有一些内容比欧几里得的《原本》更为专深，具有明鲜的解析几何的思想，其理论论证详尽严格，经过1000多年竟几乎无人增补或修正，在17世纪帕斯卡、笛卡儿发明解析几何成为数学领地的开拓者之前，关于圆锥曲线的理论始终无人超越阿波罗尼奥斯一

步。

在阿波罗尼奥斯之前，古希腊的亚里士多德、欧几里得和门内马斯(Menaechmus)对圆锥曲线都有过不少工作。这方面工作最多的是门内马斯，他是出于对倍立方的冲击而考虑圆锥曲线的，他(用现代表达方式而言)用抛物线与双曲线的交点或抛物线与抛物线的交点

$$\begin{cases} x^2 = ay \\ xy = 2a^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = ay \\ y^2 = 2ax \end{cases}$$

而得出 $x^3 = 2a^3$。阿波罗尼奥斯是由同一个圆锥(直圆锥或斜圆锥)用平面来截得三种圆锥曲线的，他之前的数学家则分别用顶角为锐角、直角和钝角的圆锥获得椭圆、抛物线和双曲线，与圆锥相截的平面与一条母线垂直。3 种圆锥曲线的命名亦源于阿波罗尼奥斯，分别称为椭圆、双曲线和抛物线。搞双曲线时，阿波罗尼奥斯用一对对顶圆锥与平面相截。

阿波罗尼奥斯不仅用统一的方式得到了 3 种圆锥曲线，而且研究了它们的性质，例如中心、双曲线的渐近线、直径、切线以及焦点个数等问题，达到了非解析几何意义下综合演绎几何学的最高峰。

1604 年，德国天文学家开普勒(Johannes Kepler，1571—1630)学习了阿波罗尼奥斯的圆锥曲线理论，结合天文学的观测实践，发现了行星运行轨道是椭圆，这一成果成为现代天文学的基础理论，同时也成了牛顿万有引力定理的主要基础；圆锥曲线理论也启发笛卡儿去建立解析几何。

公元 4 世纪，古希腊的帕波斯在名著《数学汇编》中给出了圆锥曲线的标准定义，他引入焦点与准线；动点和定点的距离与动点和定直线的距离之比为常数时，动点的轨迹为圆锥曲线；比值小于 1 者为椭圆，等于 1 者为抛物线，大于 1 者为双曲线；定点即焦点，定直线即准线。

数学史上把公元前 30 年到 6 世纪称为“亚力山大后期”，帕波斯(Pappus，300—350)是“亚力山大后期”最后一位著名数学家，《数

学汇编》全书共 8 卷,囊括了希腊自古以来各名家著作的主要内容与评注,也有他自己的创造性工作,例如"周长相等的平面图形中,圆的面积最大",和关于旋转体体积的帕波斯定理:"平面图形绕同一平面上的轴线转动形成的立体之体积等于这图形的面积乘以其质心所画圆周之长。"

《数学汇编》是名符其实的几何宝库,此后希腊几何就再也没有太重大的成果了。《数学汇编》成了古希腊诸位著名数学家的安魂曲。

下面介绍按帕波斯的标准定义,通过焦点与准线的观点给出的圆锥曲线的特征与论证。

考虑对顶的直圆锥,用不通过圆锥顶点的平面 π 来截这两个圆锥。

若 π 与一个圆锥的所有母线相交,则截线是椭圆,见图 2.19。若 π 与圆锥的两腔相交,即 π 平行于圆锥面的两条母线,则得到的截线是双曲线。当我们作一个通过圆锥顶点 S 且与 π 平行的平面时,就容易看出 π 与圆锥的两条母线平行,这样所作的平面,和

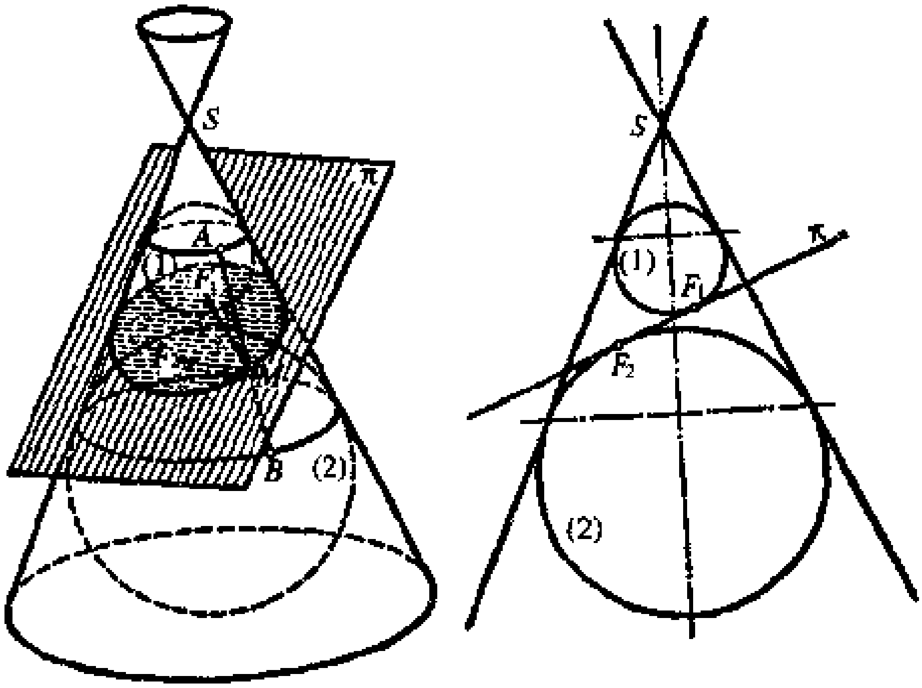


图 2.19

圆锥面相交于与 π 平行的那两条母线，见图 2.20。

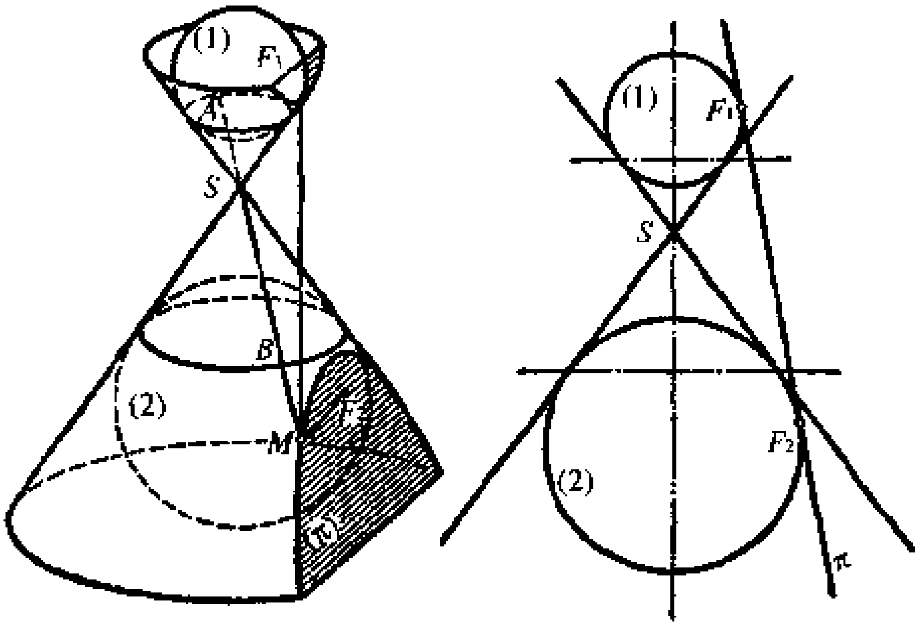


图 2.20

图 2.19 中把球面(1)与(2)分别放在平面 π 的上方和下方，和 π 相切于 F_1 与 F_2 两点，这两球面又与圆锥面相切于两个圆，在椭圆上任取一点 M，在锥面的母线上过 M 点引线段 AB，A 与 B 分别在上述两圆上，连接线段 MF_1 与 MF_2，则直线 MA 与 MF_1 和球面(1)相切，故有

$$MA = MF_1$$

同理，MB 与 MF_2 和球面(2)相切，故有

$$MB = MF_2$$

于是

$$MF_1 + MF_2 = MA + MB = AB = 常数$$

至此得出结论：

椭圆是平面 π 上所有这样的点 M 的集合，M 与 π 上两个已知点 F_1，F_2 距离之和是一个常数。

点 F_1 与 F_2 称为椭圆的焦点。

在图 2.20 中，把球面(1)与(2)分别放入圆锥的两腔中，使它们分别与平面 π 相切于点 F_1 与 F_2，且它们分别与圆锥面切于两

个圆。在双曲线上任取一点 M,我们可得

$$MF_1 = MA, MB = MF_2$$

其中 M,A,B,S 共线,S 是锥顶点。于是

$$MF_1 - MF_2 = MA - MB = AB$$

而 AB 的长与 M 点的选取无关,故

$$|MF_1 - MF_2| = 常数$$

至此得出结论:

双曲线是平面 π 上这样的一个点集,它的每个点与这平面上的两个已知点的距离之差的绝对值是一个常数。

此处取绝对值的缘故是,如果 M 取在双曲线另一个分支上,则 $MF_1 - MF_2$ 是负的,但绝对值不变。

点 F_1 与 F_2 称为双曲线的焦点。

若平面 π 与圆锥的一条母线平行,这个平面 π 只与圆锥面的一个腔相交,见图 2.21,这时 π 与圆锥面截得的曲线称为抛物线。

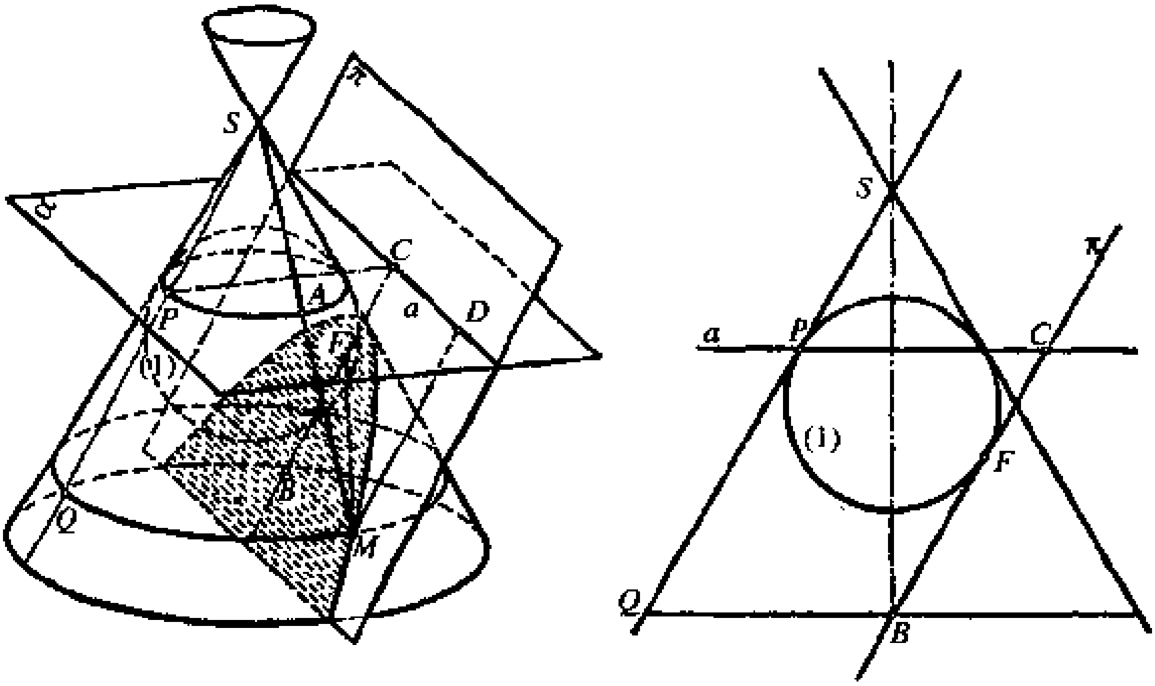


图 2.21

设平面 π 平行于圆锥母线 SQ,作一球面(1),使它与圆锥切于圆周 AP,且与平面 π 切于点 F,设直线 CD 是圆周 AP 所在平面与 π 的交线。

在抛物线上任取一点 M，则 M 到 F 点与 M 到 CD 直线等距，即

$$MF = MD$$

其中 $MD \perp CD$。

事实上，过点 M 作一平面 MQ 平行于圆 AP 所在平面 α，且作圆锥母线 MS、MS 与圆周 AP 交于 A。因为 MF 与 MA 皆与球面(1)相切，所以

$$MF = MA$$

设母线 QS 与圆 AP 交于 P，则 $MA = QP$，而 $QP = BC$，其中 $BC \parallel MD$，且 B 点在平面 MQ 上，F 点在 BC 上。同理可得 $BC = MD$。于是

$$MF = MA = QP = BC = MD$$

$$MF = MD$$

至此得出结论：

抛物线是平面 π 上这样的点 M 组成的集，M 与这平面 π 上一个已知点 F 及一已知直线 $a = CD$ 等距。

F 称为抛物线的焦点，F 不在直线 a 上，a 称为抛物线的准线。

椭圆和双曲线也有准线，各有两条准线，这些准线是平面 π 与球面(1)与(2)与圆锥相切的圆所在平面的交线。

因为上述的椭圆、双曲线和抛物线是一个平面与圆锥面的交线，故命名为圆锥曲线。

通过焦点与准线，可以得出 3 种圆锥曲线的统一定义：

平面 π 上那些点 M 的集合称为圆锥曲线，M 距已知点 F 的距离 MF 与距已知直线 a 的距离 MD 之比是一个非零常数，即

$$\frac{MF}{MD} = e = \text{常数}$$

$e < 1$ 时是椭圆，$e = 1$ 时是抛物线，$e > 1$ 时是双曲线，焦点 F 与准线 a 在平面 π 上，面 F 不在 a 上。

4　古希腊数学的衰落

公元前212年，罗马帝国占领叙拉古，伟大的科学家阿基米德惨死于罗马士兵的屠刀之下。公元前146年，迦太基落入罗马帝国的势力范围，从此希腊成了罗马帝国的一个省，人类文明史上的灾难降临了。罗马帝国把基督教定为国教，残酷排斥与迫害异教徒，禁止基督徒接受希腊文化与科学，这些统治者为了保全其统治地位，连数学、物理、力学和天文学也怕成为对其不利的东西加以排斥，出现了人类历史上首次(第二次是中国的秦始皇搞的！)焚书坑儒运动，把希腊数学与"恶行"视为同类可恨的东西，竟然制定了"数学与恶行禁典"，以法律的形式使打击希腊数学合法化。公元47年，亚力山大图书馆被焚毁，藏有几十万种手稿的希腊神庙亦付之一炬，数量巨大的数学科学典籍化为灰烬！对希腊数学家则如对待敌人似地加以迫害、驱逐和杀戮！

例如血染数学史的著名数学家许波提娅(Hypatia，370—415)，她是数学史上第一位女数学家，其父赛翁是当时的著名学者，精通数学与天文。许受其父影响，在自然科学和数学上受到极好的早期教育，后以数学研究为职业，可惜她的论文几乎全部被罗马人烧毁，只剩下她关于二次方程求根公式等少量成果。她拒绝加入基督教，是新柏拉图学派的领袖，试图继承和光大古希腊的文明与数学科学，她以聪明和雄辩的才能，以丰富的知识和端庄美丽的仪容赢得举国上下的爱戴，当时王子向她求婚，她回答道："我不能再嫁，因为我已献身于真理！"她的学问与威望被基督教视为一种威胁，当局指责她的学问是异端邪说，必欲置之死地而后快。

415年，基督教长西里尔指派一伙暴徒对许波提娅拦路行凶，拔光她的头发，用牡蛎壳把她的皮肉刮下来，把残余的骨架放火烧掉，罗马帝国的统治者仇视科学达到了丧心病狂的地步！529年，罗马王杰斯丁宁下令封闭希腊学校，大批希腊知识分子逃亡国外，灿烂的古希腊数学在鄙视科学的罗马统治者手下打击得一落千

丈。

641年，回教徒征服亚力山大，阿拉伯人把基督徒劫后残余的一些希腊文献拿来当柴烧，亚力山大城里的浴池连续6个月用希腊的羊皮纸文献烧水，真可谓文化大浩劫，从此希腊数学一厥不振，灿烂的古希腊数学的光辉熄灭了。

野蛮和不学无术是文化科学的大灾星，回忆我国秦、元、清等几个时代造成的数学衰落，与古希腊的数学遭遇如出一辙。

除了政治原因外，希腊数学传统的局限性也是阻碍它继续繁荣的一个原因。

(1)古希腊数学家过份强调逻辑性与严密性。欧几里得的《原本》是希腊数学的样板，它只言理论而不言它，而且太偏爱几何，即使代数问题，也诉诸几何来加以证明，这就束缚了非几何分支的发展。

(2)古希腊数学大多数(也有少数例外，例如阿基米德)鄙视应用，热衷于抽象，诸塞了从实际问题中提炼数学概念、理论与解法的渠道。

古希腊数学的优缺点与古代中国数学的缺点与优点恰好是互补的，由此可知多种文化科学的交流融合是多么必要。

第三章　解析几何开辟高等数学新纪元

解析几何彻底改变了数学的研究方法

——M.克莱因

1　划时代的数学家和划时代的数学学科

1637年,笛卡儿的名著《几何学》问世,宣布解析几何的诞生。解析几何的创立标志着数学从初等数学时期进入高等数学时期。笛卡儿是一位划时代的数学家,解析几何是一门划时代的数学。解析几何使变量成为数学舞台的主要角色,建立的坐标系为数学科学搭建了赖以繁衍生息的大厦的框架。

笛卡儿(Descartes Reńe du Perron,1596—1650),法国著名哲学家、数学家和自然科学家,生于法国图赖讷地区的拉艾城。1612年考入巴黎普瓦捷大学攻读法学,获法学博士学位,成了一名律师。1628年移居荷兰,潜心数学研究20余年,为人类科学事业做出不朽的贡献。他的代表作是《几何学》,全书分成3卷,第一卷把线段与数量(长度)联系起来,把几何问题代数化,用方程表示线段间的关系;第二卷把平面上的点与坐标(x,y)对应起来,把曲线化成含两个变量x与y的方程;第三卷讨论代数方程的理论。

笛卡儿不仅是解析几何的创始人,而且是近代西方哲学的奠基人之一,他的数学思想和数学方法洋溢着深刻的哲学气息和形而上学的思辩性。他的哲学著作有:

1634年,《宇宙论》;1637年,《方法论》;1641年,《形而上学的

沉思》;1644 年,《哲学原理》;1701 年,《指导哲学之原则》。

创立解析几何的著作《几何学》则是作为《方法论》附录的形式问世的。

《宇宙论》论述哥白尼学说,讨论地球自转与宇宙无限的理论。为了避开教会的耳目,笛卡儿把这一著作的主要章节附在标题为《科学中正确运用理性和追求真理的方法论》(后人称之为《方法论》)之后发行,不然,笛卡儿也许由于宣传“异端”学说遭到教会迫害。笛卡儿禀赋内向,性格谨小慎微,胆小怕事,慑于法国卡尔文教会的淫威而流亡荷兰。

在《方法论》中笛卡儿批评了古希腊几何的刻意抽象和每个题目都需要一些特设的技巧的弊端,阻碍几何学的进一步发展。笛卡儿欲搞一种思想与方法都具有统一性的代数化的新几何学来取代欧几里得式的几何,他终于成功了,他发明的解析几何设立坐标系与点的坐标(x,y),把数与形统一了起来。

1619 年,笛卡儿研究“帕波斯问题”:

平面上给定 5 条直线 l_1,l_2,l_3,l_4,l_5 和动点 P,过 P 点向这 5 条直线分别作线段 PA_1,PA_2,PA_3,PA_4,PA_5;A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 分别在 l_1,l_2,l_3,l_4,l_5 上,且 PA_i 与 l_i 的夹角为 α_i,$i=1,2,\cdots,5$;α_i 是事先任意指定的,要求

$$(PA_1)(PA_2)(PA_3)=k(PA_4)(PA_5)$$

其中 k 是事先指定的正数。求 P 点的轨迹。

这个问题引发了笛卡儿建立坐标系,且把几何问题化成代数方程的思想,这个问题是引发解析几何诞生的重要契机之一。

例如当 $l_1\parallel l_2\parallel l_3\parallel l_4\perp l_5$,$\alpha_i=\dfrac{\pi}{2}(i=1,2,\cdots,5)$的情形,且设 l_1,l_2,l_3,l_4 依次相距 $a>0$,见图 3.1。

设 $PA_4=x$,$PA_5=y$,则 $PA_1=x-3a$,$PA_2=x-2a$,$PA_3=x-a$,欲使

$$PA_1\cdot PA_2\cdot PA_3=kPA_4\cdot PA_5$$

应有

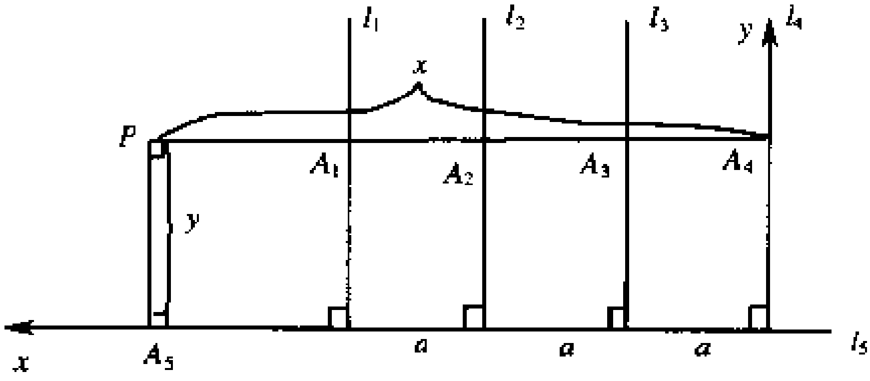


图 3.1

$$(x-3a)(x-2a)(x-a)=kxy$$

$$x^3-6ax^2+(6a^2+2a^2+3a^2)x-6a^3=kxy$$

$$x^3-6ax^2+11a^2x-6a^3=kxy \tag{3.1}$$

即所求轨迹是与 l_4 的距离为 x、与 l_5 的距离为 y，x，y，满足方程(3.1)的点的轨迹。曲线方程(3.1)被牛顿称为笛卡儿三次曲线或三叉戟曲线。

按笛卡儿的说法，把 l_4 与 l_5 取为坐标轴，(x,y)称为 P 点的坐标，方程(3.1)是动点 P 的轨迹方程；于是笛卡儿把一条轨迹曲线与一个二元方程视为同一事物，而且可以通过方程的研究得知相应的曲线的性质。笛卡儿解决“帕波斯问题”等几何问题的这种具体思路与方法推而广之一般化之后，遂发育成一门叫做解析几何的新学科。“解析”二字指用代数方程这种解析表达式来描述几何对象，进而可以解析地，即代数地研究几何问题。

通过解决帕波斯问题等几何问题，笛卡儿灵感涌现，犹如拾到了一串打开高等数学奥秘的“魔钥”：设一些几何对象的量为 x，y，z，建立坐标系，推导几何对象满足的代数方程，从而把几何代数化。

产生数学灵感并非谁人都有这种幸运，它是以对前人的数学理论与方法有了全面透彻的掌握为基础，经过自己对问题勤奋不懈的深思熟虑的果实，正所谓种玫瑰者得花。

笛卡儿的童年过得并不幸福，其母生他时去世，笛卡儿也险些

夭折,他的名字中的 Reńe 法文是"重生"的意思。笛卡儿从小身体瘦弱,只好躺着看书,于是养成了一生都喜欢躺着思考科学问题的毛病。他极其聪敏,好奇心强,当时他上学的教会学校向学生灌输宗教与经院哲学那一套陈词滥调,笛卡儿看穿了它的破绽和谬误,听课后直言:"没有一件事不是可疑的。"他只喜欢数学老师克拉维斯的代数课,这位老师也是利玛窦的老师,法国小有名气的数学家。笛卡儿把全部求知欲都倾注到代数课上去了,但他很快就察觉到代数的一些内容缺乏直观性,同时他又不喜欢欧几里得几何,觉得它缺乏动感和想象力,笛卡儿立志要建立一种集代数与几何两门学科的优点于一身而又能去掉两者缺点的新学科。他满脑子净是这种思绪,一俟时机来临,例如遇到上述帕波斯问题,就会产生灵感而涌现出脑子里长期梦魂萦绕的问题的解决方案。

笛卡儿除了创建解析几何外,还给出多项式正负根个数和待定系数法等重要的数学方法。

对于 n 次方程

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0(a_0\neq0,a_n\neq0)$$

笛卡儿证明:序列 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 变号次数为 p,则 $f(x)=0$ 的正根个数(一个 k 重根按 k 个根计算)等于 p 或比 p 少一个正偶数,$p=0$ 时无正根,$p=1$ 时有且仅有一个单重正根。

从笛卡儿的手稿中发现笛卡儿比欧拉早 10 年就知道了多面体公式

$$\nu-\varepsilon+\phi=2$$

其中 ν 是顶数,ε 是棱数,ϕ 是面数。

笛卡儿还算出了摆线的面积,给出对数螺线的极坐标方程为

$$\rho=a\mathrm{e}^{k\varphi}$$

以及笛卡儿叶形线的方程为

$$x^3+y^3=3axy$$

见图 3.2。

顶点 A 的坐标为$\left(\frac{3a}{2},\frac{3a}{2}\right)$,圈套中的面积为 $S=\frac{3}{2}a^2$。

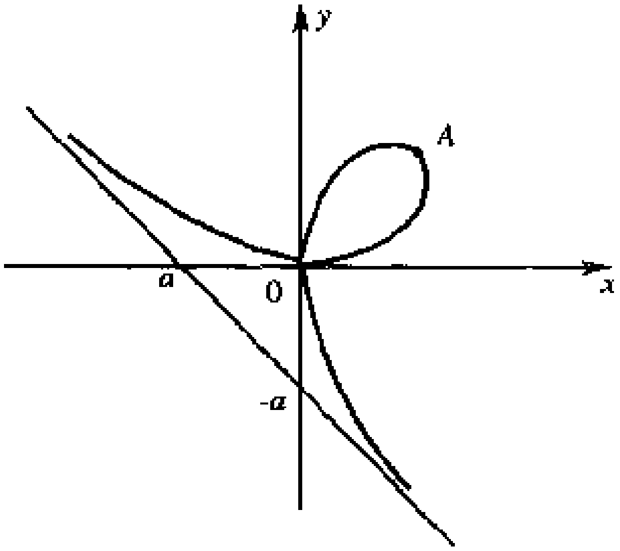


图 3.2

笛卡儿对数学的本质有独到的见解，他说："所有那些旨在研究顺序与度量的科学，都和数学有关。至于所求的度量是关于数的呢，形的呢，声的呢，还是其他东西的呢，都是无关紧要的。因此，应当有一门普遍的科学，去解释所有我们能够知道的顺序和度量，而不考虑它们在个别科学中的应用。事实上，通过长期的使用，这门科学已经有了自身的专名，它就是数学。它之所以在心灵活动和重要性上远远超过那些依赖于它的科学，是因为它完全包括了这些科学的研究对象。"

笛卡儿说："上帝是按照数学规律建立自然界的。"他强调理性，轻视经验，他的哲学格言曰："我思，故我在。"他的数学格言是：

"一切问题可以化成数学问题，

一切数学问题可以化成代数问题，

一切代数问题可以化成方程求解的问题。"

对于他的哲学格言，我们不敢完全苟同，但对于他的数学格言，我们不可以不信。

笛卡儿一生办事谨慎，与世无争，但终因其科学结论与教义相违而招致教会的迫害，1647 年梵蒂冈把笛卡儿的著作列为"禁书"，宣布全部焚毁。笛卡儿去世时，无人敢去给这位"危险人物"

送葬,没有追悼会,没有悼词,几个亲友把他草草安葬了事。

由于笛卡儿的数学成就和哲学成就如此之大,以致于深受全世界各国正义人民的无限怀念与尊崇。他去世17年之后,法国政府下令把他的骨灰迎回他的祖国,安葬在潘提翁法国伟人墓地,1799年移入法国历史博物馆,1819年又保存在圣日耳曼圣心堂内。墓碑上刻:

"笛卡儿,
欧洲文艺复兴以来,
为人类争取并保证理性权利的第一人"。

设想没有笛卡儿,没有坐标系和变量,没有解析几何,今日的数学内容还能剩下些什么?

应该提到的是,法国另一位比笛卡儿小5岁的数学家费马(P. de Fermat,1601—1665)从另一个出发点独立地进行了解析几何的初创工作,费马主要是从不定方程解的作图这一角度开展解析几何工作的,也是继承阿波罗尼奥斯和帕波斯的工作之后,发扬光大之搞出了解析几何的理论与方法。

2 解析几何的发展与完善

解析几何一经建立,就得到了膨胀式的迅速发展,且广泛渗透到数学与物理学等多个学科中去。

1692年,莱布尼兹首先使用"坐标"一词,两年后,莱布尼兹正式提出"纵坐标"的术语,到18世纪,德国数学家沃尔夫引人"横坐标"这一术语,"解析几何"的名称则是18世纪末由法国数学家拉克鲁瓦正式引人的。

1665年英国数学家沃利斯在其著作《论圆锥曲线》中第一次将圆锥曲线定义为对应于 x,y 的二次方程的曲线,且证明了其等同性,又用 x,y 的二次方程来推导出圆锥曲线的性质。

1748年,欧拉在《无穷分析引论》中从一般二次方程

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

出发，系统研究了圆锥曲线的各种情形，并在圆锥曲线的研究当中引入参数方程和极坐标。

在《无穷分析引论》中，欧拉还研究了 3 个变量 x,y,z 的二次方程

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+2ux+2vy+2wz+d=0 \tag{3.2}$$

其中系数皆实数，二次项系数不全为零，得到 6 种二次曲面：锥面、柱面、椭球面、单叶和双叶双曲面、双曲抛物面和抛物柱面，且按系数对方程(3.2)进行了分类。

1802 年，法国数学家蒙日证明每个二次曲面与平面的截线皆二次曲线，且平行截口是相似的二次曲线。

1832 年，瑞士数学家施泰纳建立了直纹面二次曲面的理论。

到 19 世纪，解析几何已日臻完善。

3　几何定理的机器证明

有了解析几何，初等几何中的命题，如果条件中不涉及不等式，则可以通过坐标系的选取，把已知与结论用相应的代数等式来表达，于是初等几何的命题可以化为在已知一些代数式成立的条件下，求证另一些代数式成立的问题，而代数式是否为恒等式，可用计算机来判定。

1977 年，我国著名数学家吴文俊在《中国科学》上发表《初等几何判定问题与机械化证明》的开创性论文，给出了证明等式型初等几何定理的新的代数方法，吴方法证明等式型几何定理的效率比以前的各种方法高得多，“吴方法”的出现是几何定理机器证明领域的重要突破。20 世纪 80 年代，“吴方法”的成功促进了这个领域在国际范围的蓬勃发展。1984 年，吴文俊的名著《几何定理机器证明的基本原理(初等几何部分)》由科学出版社出版，中国留美学者周咸青用吴方法证明了 130 个几何定理，1988 年，又用吴方法证明了 512 个几何定理；很难的几何定理，在机器上几秒钟即可

证出。

吴方法的成功，使几何定理机器证明的研究空前活跃地在国内外开展起来。

历史上，也曾有一些大数学家搞过几何定理的机械化解题方法，例如19世纪到20世纪的大数学家希尔伯特在其名著《几何基础》中就曾有过这方面一些论述。

1948年，塔斯基(Tarski)发表了一则重要定理："一切初等几何和初等代数命题构成的命题类，是可判定的。"就是说，如果命题的前提与结论都可用有限个整系数多项式的等式或不等式来表达，则存在一套机械的方法，对于此命题类中的问题，能用这种机械的方法经有限步操作而判定该命题之真伪。

而且该定理的证明是构造性的，塔斯基真的给出了一套判定初等几何和初等代数问题的机械化方法，但他的方法(算法)的时间复杂度太大，即使用快速计算机，也不能在合理的时间(例如几天内)判断稍微难一点的几何定理(例如西摩松定理)之真伪。

塔斯基工作的重要性主要是他首创用解析几何的方法把几何代数化，再用代数与机器相结合来解决问题这一可贵的思路。

1975年，考林斯(Collins)提出比塔斯基算法效率高的新方法，但在计算机上仍只能解决个别稍难的几何问题。

1976年，吴文俊开始从事定理机器证明，在短短的几年内，就取得了重大突破。吴在《几何定理机器证明的基本原理(初等几何部分)》当中，遵循机械化思想引入数系和公理，分门别类地分析几种几何体系，明确建立了各类几何的机械化定理，系统地阐明几何定理机械化证明代数方法的基础。这本书的问世，是数学机械化领域的大事，确定了数学机械化在我国的优势。1994年，《几何定理机器证明的基本原理(初等几何部分)》由著名的Springer出版社出版。

在计算机自动推理的研究当中，几何定理的机器证明曾经是最不成功的领域，如今它却变成了最成功的领域；吴方法还能证明局部微分几何定理，并有其他众多应用；吴方法提供了一套处理非

线性代数方程组的理论与方法，而且吴方法具有很高的效率，原来几十个小时证出的问题，现在仅需几秒钟即可。

吴文俊，1919 年生于上海一个知识分子家庭，1936 年考入上海交通大学数学系，是全校 3 名奖学金获得者之一。1946 年，吴文俊到陈省身主持的中央研究院数学研究所工作，开始研究拓扑学。1947 年，吴在普林斯顿大学主办的《数学年刊》上发表了关于示性类的精彩论文。1947 年赴法留学，1949 年获法国国家博士学位，之后参加 H.嘉当和布尔巴基两个讨论班。1951 年回国任北大数学系教授，1952 年任中国科学院研究员，1956 年获第一届国家自然科学一等奖，1957 年选为中国科学院学部委员。

吴文俊在中国古算研究的基础上，分析西方从古希腊到笛卡儿思想的特点，中西合璧，1977 年终于创造出几何机器证明的现代化数学分支，1978 年，他把这一方法推广到微分几何。他十分重视中国古代数学中的精华(例如算法思想)，1986 年吴在世界数学家大会上作的关于中国数学史的报告，引起世界数学界的广泛兴趣。在近代数学史上，几何定理机器证明是第一个由中国数学家开创的数学新领域，首次出现不沿袭他国主题、他国问题和他国方法的现代数学成就，且吸引了众多世界数学家向中国数学家学习。1990 年，成立了以吴文俊为首的“数学机械化中心”。

在机器证明方面，吴文俊的主要贡献在于：

(1)提出一套有效算法，使代数方程组通过机器消元而变成一个代数方程式。

(2)解代数方程组可以扩大到带微分的代数方程组，从而扩大了研究范围。

(3)不仅可以证明定理，而且可以发现定理。

(4)与许多从前是原则上可行的方法相比，吴方法变成完全可行的算法。

(5)算法稳定，且可一举多解。

陈省身称吴文俊“是一位杰出的数学家，他的工作表现出丰富的想象力和独创性，贡献卓著。”J. S. 穆尔(Moore)认为“在吴文俊

之前,机械化的几何定理证明处于黑暗时期,而吴文俊的工作给整个领域带来光明。”L.渥斯(Wos)认为“吴文俊的证明路线是处理几何问题最强有力的方法,吴文俊的工作将永载史册。”

由于吴文俊在纯粹数学、应用数学和定理机器证明诸领域的重大成果,中国政府于2001年向吴文俊院士颁发了“重大科学技术成就特别奖”。

在几何机器证明这一领域,还有两个问题:

(1)几何定理机械证明可读性证明的自动生成问题。

(2)几何不等式的机器证明问题。

20世纪90年代,这两个问题也由中国数学家相继突破。

在机器证明的全过程中,要多次进行多项式的运算,处理的多项式往往是高次的甚至上千项的大多项式,打印出这种证明过程,人们在合理的时间内很难看懂,更难以弄明白其中的几何意义,不易检验其正误。

1992年,我国著名数学家张景中院士到美国维奇塔大学与同行专家周咸青、高小山等人合作研究,张景中终于在短期内解决了可读性证明的难题,他以“平行四边形对角线互相平分”和“帕普斯定理”进行了演示,得到了便于理解和检验的可与人工证明媲美的可读性机器证明,计算机开始像人那样来解决几何问题。这一成果被国际同行誉为“计算机发展几何问题解题能力道路上的里程碑。”

1993年张景中、杨路、高小山和周咸青等用计算机发现了几十条非欧几何的新定理,并用机器自动生成了它们的可读证明。

张景中,1936年出生于河南省,1959年北京大学数学力学系毕业,1979年任教于中国科学技术大学,1986年任中科院研究员,1995年选为中国科学院院士。从事机器证明、距离几何和动力系统等领域的研究工作,发表论文百多篇。他提出的系统的面积法有效地用于机器证明之中,使几何定理可读性证明的自动生成这个多年进展甚微的难题得以突破,1995年获中科院自然科学一等奖,1997年,获国家自然科学二等奖。张景中在教育数学领域亦

有创造性工作，且为人正义，为人师表。

1998 年，中国著名数学家杨路发表论文《不等式机器证明的降维算法与通用程序》，使不等式的机器证明这一难题得以突破。杨路成功地用机器证明了 1000 多个不等式，其中近半数是近期提出的未经证明的猜想，他对《几何不等式》一书中 120 个基本不等式的证明总耗时仅 20 多秒。

下面以 1996 年杨路、张景中、侯晓荣在专著《非线性代数方程组与定理机器证明》一书中给出的西摩松定理为例，说明平面几何问题如何代数化再进行机器证明的思路：

△ ABC 的外接圆上任取一点 D，自 D 向 BC，CA，AB 引垂线，垂足依次为 E，F，G，则 E，F，G 在同一条直线上（此直线称为西摩松线）。

取外接圆心 O 为坐标原点，半径为 1，且取 D 点为 $D(1,0)$，其他点为

$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$E(x_5,y_5)$，$F(x_6,y_6)$，$G(x_7,y_7)$

由 E 在 BC 上等条件得

$$\begin{cases} x_5 = \lambda x_2 + (1-\lambda)x_3, y_5 = \lambda y_2 + (1-\lambda)y_3 \\ x_6 = \mu x_3 + (1-\mu)x_1, y_6 = \mu y_3 + (1-\mu)y_1 \\ x_7 = \rho x_1 + (1-\rho)x_2, y_7 = \rho y_1 + (1-\rho)y_2 \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} p_1 = x_1^2 + y_1^2 - 1 = 0 \\ p_2 = x_2^2 + y_2^2 - 1 = 0 \\ p_3 = x_3^2 + y_3^2 - 1 = 0 \\ p_4^* = (1 - \lambda x_2 - (1-\lambda)x_3)(x_2 - x_3) - (\lambda y_2 + (1-\lambda)y_3)(y_2 - y_3) = 0 \\ p_5^* = (1 - \mu x_3 - (1-\mu)x_1)(x_3 - x_1) - (\mu y_3 + (1-\mu)y_1)(y_3 - y_1) = 0 \\ p_6^* = (1 - \rho x_1 - (1-\rho)x_2)(x_1 - x_2) - (\rho y_1 + (1-\rho)y_2)(y_1 - y_2) = 0 \end{cases}$$

其中 p_1 表示 A 点在单位圆周上，p_4^* 表示 $DE \perp BC$ 等。欲证 E，F，G 共线，即

$$g = (x_5 - x_6)(y_5 - y_7) - (x_5 - x_7)(y_5 - y_6) = 0$$

利用 p_1,p_2,p_3 把 p_4^*,p_5^*,p_6^* 变成

$$\begin{cases}p_4=(2\lambda-1)(x_2x_3+y_2y_3-1)+(x_2-x_3)=0\\ p_5=(2\mu-1)(x_3x_1+y_3y_1-1)+(x_3-x_1)=0\\ p_6=(2\rho-1)(x_1x_2+y_1y_2-1)+(x_1-x_2)=0\end{cases}$$

由式(3.3)可得

$$g=(\lambda\rho+\lambda\mu+\mu\rho-\lambda-\mu-\rho+1)\cdot$$
$$[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]=0$$

g 是一个 9 元多项式,它的 9 个变量之间用 p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6 约束着,可以消元使得只剩下 3 个自由变元,不妨设 x_1,x_2,x_3 是自由变元,可得一多项

$$\Phi=\Phi(x_1,x_2,x_3)$$

于是可以用机器来证明 Φ 恒为零,即证明了西摩松定理。

机器如何用一定的算法来证一个多项式恒为零呢?

1986 年,中国数学家洪加威在《中国科学》上发表《能用例证法证明几何定理吗?》,给出著名的"例证法",例如欲证 $(x+1)(x-1)\equiv x^2-1$,取 $x=0$,得 $-1=-1$,等式成立;取 $x=1$,得 $0=0$,等式成立;取 $x=2$,得 $3=3$,等式成立,所以由代数基本定理,$(x+1)x(x-1)=x^2-1$ 不是方程,而是恒等式。一般而言有以下定理:

若 $f(x)=q(x)$ 是一个次数不超过 n 的多项式等式,且找到了 $n+1$ 个不同的数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$,使得 $f(a_i)=q(a_i),i=0,1,\cdots,n$,则 $f(x)\equiv q(x)$。

1989 年,杨路、张景中发表《定理机械化证明的数值并行法及单例证法原理概述》的论文,使证法的时间复杂度降低。

在倍立方问题中我们知道$\sqrt[3]{2}$不是规尺数,而一元二次方程的根是规尺数,可见$\sqrt[3]{2}$不是一元二次方程的根,此事可以推广。

1995 年,侯晓荣在学位论文《几何定理机器证明的实验法》中给出了所谓"单例实验法"。它的基础原理是:

若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_k)$是 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 的多项式,关于 x_i 的次数不大于 n_i,又 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 是互不相同的素数,若

$$f(p_1^{\frac{1}{l_1+1}}, p_2^{\frac{1}{l_2+1}}, \cdots, p_k^{\frac{1}{l_k-1}}) = 0$$

则 $f(x_1, x_2, \cdots, x_k) \equiv 0$。

上面谈的这些运算，皆由计算机去完成。

几何定理的机器证明蕴含深刻的哲理，例如例证法，传统数学认为，例证只能是一种经验归纳，是猜测和发现真理的开端，而不是证明，严格证明似乎不能用举例来完成，除非是有限的情形之穷举法，即有一种不成文的规矩：举例子不算证明。而今在计算机上干的证明却恰为例证法。计算机对几何定理的证明方式明确地回答了哲学家穆勒(J.S.Mill)的困惑："为什么在有些场合，单个实例对完全归纳法是足够的？"

第四章　微积分和第二次数学危机

任何研究工作的开端，几乎都是极不完善的尝试，为了寻求真理，我们是注定要经历挫折和失败的。

——狄德罗

1　微积分产生的社会背景和数学渊源

微积分在17世纪诞生，当然不是偶然的，17世纪给予了数学以巨大的推动，这种推动来自当时的政治、经济和社会发展。早在15世纪，欧洲开始文艺复兴，难民们带着希腊文化流入意大利。在15世纪末，发现了新大陆(美洲)，完成了环球航行，商业、航海、天文和测量等活动日益繁荣，促进了流体力学、天体力学、几何光学以及天文仪器和光学仪器的研究。16世纪，欧洲出现了毛瑟自动枪和火炮，枪炮的使用，激发了运动学(例如抛体运动规律)和动力学(例如力与速度、加速度)的研究。

黑暗的中世纪之后，在生产、殖民和技术的需求刺激之下，科学以意想不到的力量重新兴起，且以神奇的速度发展。事实上，社会一旦有技术上的需要，它比建立10所大学更能把科学推向前进，而科学技术的进步，又迫切地需要数学跟上来为之提供相应的新理论新方法来辅佐科学技术的更快更高地发展。

这一时期求面积、求体积、求速度、求加速度、求行程等已经迫不及待地提到数学家的面前，强烈要求给出有理有据的成型的算法。

从数学内部来讲，古时中国的"一尺之棰，日取其半"以及刘徽、祖冲之的割圆求π和希腊阿基米德等数学家用穷竭法求圆的

面积等数学活动,对极限与无穷小等思想与概念已有千余年的孕育。而刘徽与祖暅建立的"等幂等积定理"和阿基米德切割圆柱、内切球和圆锥用平衡法求球体积的聪明方法,恰是积分的雏形,当然那还不是微积分意义上的积分,只是九月怀胎,而不是呱呱坠地的婴儿。因为刘徽、祖暅和阿基米德都没有函数的概念和没有明确提出积分和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 求极限的这种运算形式,但刘徽、祖暅和阿基米德实质上干的正是分割求和及取极限的事。

17 世纪初,很多数学家为微积分的登场做了大量的铺垫和前期准备工作。

工程师斯蒂文(Simon Stevin,1548—1620)和意大利数学家瓦莱里奥(Luca Valerio,1552—1618)是现代数学两位早期作者,他们采用了与阿基米德相似的手法来求矩形水闸上的压力问题:先把水闸分成很窄的水平长条,然后让这些长条绕其中位线旋转成水平态,再求此长条上接受的压力,把全体长条上如此求得的压力加起来,就是水闸受的压力,这种方法与初等微积分中的积分方法已经十分接近。

开普勒为了计算行星第二定律中椭圆的面积时用了卡瓦列利原理:

(1) 若两个平面片处于两条平行线之间,且平行于此二直线的任一直线与两平面片相交时,所截的两线段相等,则这两个平面片面积相等。

(2) 若两个立体处于两个平行平面之间,且平行于这两平面的任何平面与此二立体相交时,所截得的面积相等,则这两个立体体积相等。

原理(2)就是我国刘祖的等幂等积定理。

这些原理就是现代积分的结论,不过此前的数学家只是把这些原理当作显然的直观结论接受而建立起来的,并未给以严格地数学证明。

开普勒求半轴为 a 与 b 的椭圆的面积时,在同一坐标系中,椭

圆和圆分别为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b),\ x^2 + y^2 = a^2$$

见图 4.1。

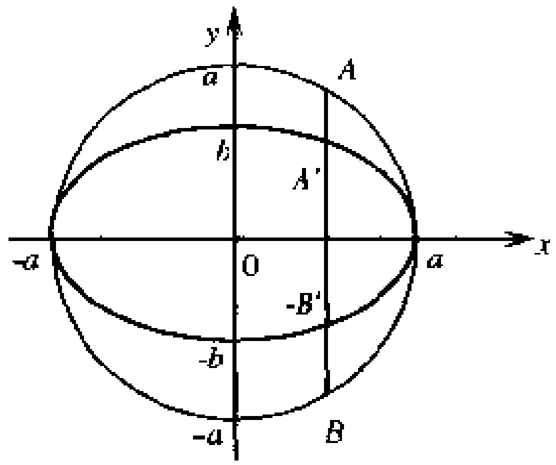


图 4.1

$$y = \frac{b}{a}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}},\ y = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}(\text{上半平面})$$

可见椭圆与圆的对应纵坐标之比为$\frac{b}{a}$。于是相应的弦之比

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{b}{a}$$

由卡瓦列利原理(1)得知

$$\text{椭圆面积} = \frac{b}{a}(\text{圆面积}) = \frac{b}{a}\pi a^2 = \pi ab$$

卡瓦列利(Bonaventura Cavalieri，1598—1647)，意大利米兰人，伽利略的学生，波洛尼亚大学数学教授，他是他那个时代最有影响的数学家之一。用卡瓦列利原理(2)可以求得球的体积：在图 4.2 中，左侧为半球，其半径是 r，右侧是高为 r 半底为 r 的圆柱以及以此圆柱上底为底顶点在圆柱下底中心的一个倒置的圆锥，把半球和挖去圆锥的圆柱状“杯子”放在同一平面上，再用平行于底面的平面来截这两个立体，则左侧截得一个圆(阴影)，此圆半径为 $\sqrt{r^2 - h^2}$，其中 h 是截面与底之距离，此圆面积为 $\pi(r^2 - h^2)$。右

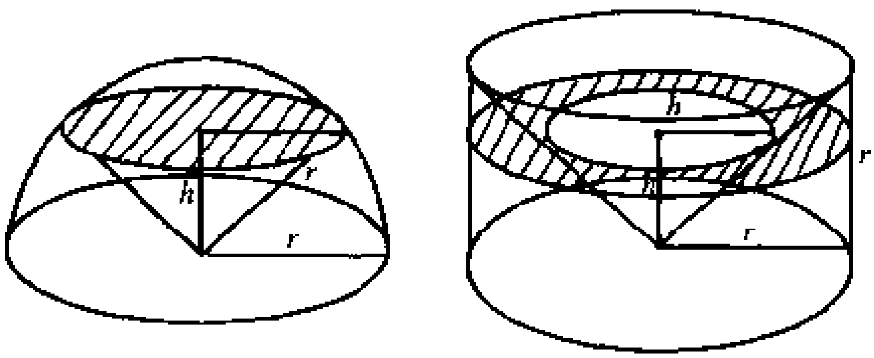


图 4.2

侧截得一个环(阴影),其面积为

$$\pi r^2 - \pi h^2 = \pi(r^2 - h^2)$$

左右侧截面积一致,故半球体积与"杯子"体积一致,

$$V_{半球} = V_{柱} - V_{锥} = \pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3} = \frac{2}{3}\pi r^2$$

$$V_{球} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

开普勒在求圆的面积时,用了微元法:把圆近似视为无限多边的正多边形,这些正多边形每边是一个三角形的一边,此三角形的一顶在圆心,则圆被分割成许多细高细高的窄三角形,这些小三角形的面积之和就是圆的面积,而每个这种三角形的面积近似为半径与这小三角形在圆上的那段弦(与对的弧近似)之积的一半,所以圆面积是周长与半径积之半,即$\frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$。他的这一办法就是极坐标意义上的积分,每个小三角的面积(微元)为

$$\frac{r\Delta\theta \cdot r}{2}$$

累加之,求极限,则得(用现在符号写的话)

$$\int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}r^2 \cdot 2\pi = \pi r^2$$

在牛顿与莱布尼兹下手搞出微积分之前,积分学的先期准备工作可以说又充分又长远,所以定积分(即积分)出现在不定积分(即原函数)之前,微分学的起源则比积分学的起源晚得多.

微分学的前期工作是切线问题与极值问题。

1629 年费马最初考虑的极值问题是作一个周长为 $2B$ 的长方形,使其面最大。他设此长方形长为 x,则宽为 $B-x$,于是面积是 $x(B-x)$,令

$$(x-E)[B-(x-E)] = x(B-x)$$
$$(x-E)[B-(x-E)] - x(B-x) = 0$$

化简得

$$2xE - BE - E^2 = 0$$

除以 E,则得

$$2x - B - E = 0$$

令 $E=0$,则得 $2x=B, x=\frac{B}{2}$,可见周长一定的长方形中以正方形面积最大。

分析费马的上述解析运算,他的 E 是 x 的变化量,即 $E=\Delta x$(当时费马把 x 写成 A),所以他的工作是令 $\Delta x\to 0$,求满足

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = 0$$

的 x 值,他的 $f(x)$ 是 $x(B-x)$,可见费马当年已经在操作求导数的具体过程,以及极值的必要条件 $f'(x)=0$。

费马还求得笛卡儿叶线的切线。对于一般的隐函数 $f(x,y)=0$,他定义了所谓"次切距",见图 4.3,次切距是切线与 x 轴的交点与切点在 x 轴上投影的距离 $AB=a$。笛卡儿叶线为

$$x^3 + y^3 = nxy$$

即

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - nxy$$

在图 4.3 中,$\triangle ABE \backsim \triangle EFD$,于是 $\frac{EF}{AB}=\frac{DF}{EB}$,设切点 $E=(x,y)$,$EF=e$,则 $\frac{e}{a}=\frac{DF}{y}$,$DF=\frac{e}{a}y$,D 点坐标为 $\left(x+e, y+\frac{e}{a}y\right)=\left(x+e, y\left(1+\frac{e}{a}\right)\right)$,认为 D 仍在曲线上(因为 e 很小),所以

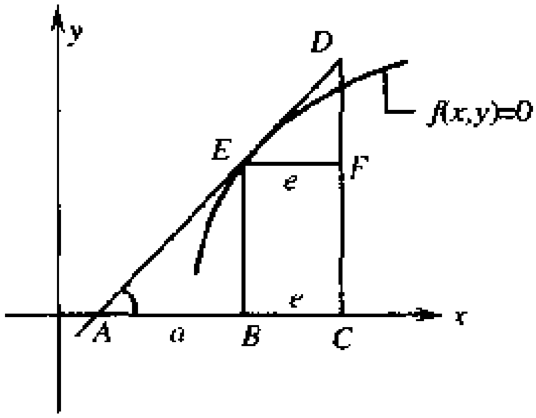


图 4.3

$$f\left(x+e, y\left(1+\frac{e}{a}\right)\right)=0$$

对于笛卡儿叶线,则为

$$(x+e)^3+y^3\left(1+\frac{e}{a}\right)^3-ny(x+e)\left(1+\frac{e}{a}\right)=0$$

$$e\left(3x^2+\frac{3y^3}{a}-\frac{nxy}{a}-ny\right)+e^2\left(3x+\frac{3y^3}{a^2}-\frac{ny}{a}\right)+e^3\left(1+\frac{y^3}{a^3}\right)=0$$

除以 e 再令 $e=0$,得

$$3x^2+\frac{3y^3}{a}-\frac{nxy}{a}-ny=0$$

$$a=-\frac{3y^3-nxy}{3x^2-ny}=-y\frac{3y^2-nx}{3x^2-ny} \tag{4.1}$$

他得到了次切距 a,则可以找到切线与 x 之交点 A,过 A 与切点 E 的直线则是欲求之切线。

式(4.1)就是我们现在微积分中的

$$a=-y\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}$$

于是

$$\frac{a}{y}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}, \quad \frac{y}{a}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

$\frac{y}{a}$是切线与 x 轴夹角的正切,这恰为今日函数 $y=y(x)$之导数,而 $\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$,恰为今日求隐函数 $f(x,y)=0$ 的导数公式。在费马的工作中,这些事都已有明显透露。

费马是一位杰出的多才多艺的数学家,他在数学的诸多领域都有出色的工作。

2 牛顿和莱布尼兹发明微积分

在牛顿与莱布尼兹以前的数学家们,虽然做了大量的在思想本质上就是微积分思想的重要工作,但仍然算不上微积分的成果,因为他们没有通过无穷小量分析来定义导数和通过分割求和取极限来(定义)建立积分的明确概念。

17 世纪后半叶,在诸如前面提到的大量前期工作的基础之上,由牛顿与莱布尼兹独立地发明了高等数学意义上的微积分。

牛顿(Newton Issac,1642—1727),英国大物理学家和数学家,1642 年大科学家伽利略去世,同年牛顿诞生在英格兰林肯郡沃尔斯索浦一个农民家庭,是个遗腹子,出生时体重 3 磅,勉强存活。奇怪的是他一生忘我地从事科学研究,从未得过大病,活到 83 岁高龄。牛顿童年时代只是个贪玩的农家孩子,并非神童,上学后成绩平平,只是喜欢动手制做一些小玩艺,例如他做了一个用老鼠拉的磨和一架用水推动的木制时钟。

牛顿 17 岁时,继父去世,迫于生活,母亲令其缀学回乡务农,牛顿开始种田、放牛和做小买卖。但他仍对实验和读书有兴趣,在格兰瑟姆镇中学斯托罗克校长的资助下,母亲又送牛顿去求学,科学界真应该好好感谢这位独具慧眼的中学校长。

少年时代的牛顿沉默内向,由于不幸的家世使他的性格有点孤僻。

1661 年，牛顿考取剑桥大学三一学院的免费生，他自己也搞勤工俭学以自助学习生活。

在三一学院，他幸运地以当时著名的数学家巴罗（Barrow Isaac，1630—1677）为师，巴罗是三一学院第一位“路卡斯数学教授”。1669 年巴罗宣布牛顿的学识和水平已超过自己，推荐 27 岁的牛顿替代自己接任“路卡斯数学教授”，这就是数学史上有名的“巴罗让贤”的佳话。巴罗于 1673 年任三一学院院长，1675 年任剑桥大学副校长，选为皇家学会首批会员。在微积分史前史上，巴罗是主要人物之一。“巴罗微分三角形”是启发牛顿发明微分学的主要杠杆。巴罗在牛顿的成长与微积分的创立上功不可没。今日在三一学院牛顿雕像的北面有一尊其恩师巴罗的雕像，后人见此，无不肃然起敬。

所谓“巴罗微分三角形”是指图 4.4 中的△ PQR，其中 PT 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，P 为切点，为确定切线，只欠找到 OT 的长度。当△ PQR 的“勾” QR 上移使得△ PQR 的面积足够小时，近似地，

$$\triangle PQR \backsim \triangle PTM$$

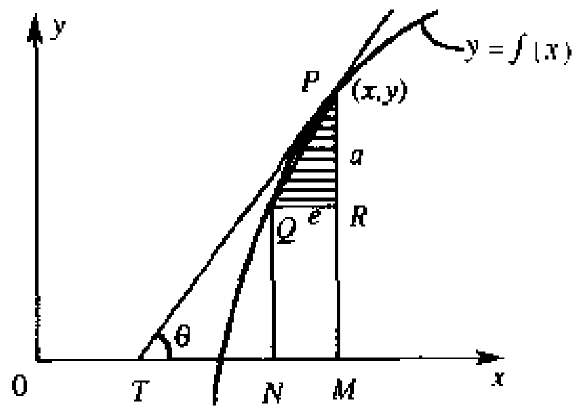


图 4.4

于是

$$\frac{PR}{QR}=\frac{MP}{TM}$$

令 $QR=e$，$PR=a$，P 点坐标为 (x,y)，则 Q 的坐标为 $(x-e,y-a)$，于是近似地（e 越小近似程度越好）

$$OT = OM - TM = OM - MP\frac{QR}{RP} \approx x - \frac{e}{a}y \qquad (4.2)$$

事实上,上述巴罗微分三角形技术求切线本质上就是在搞导数,由式(4.2)可得

$$x - OT \approx \frac{e}{a}y, \quad TM \approx \frac{e}{a}y$$

其中 $e = \Delta x$, $a = \Delta y$。于是

$$\frac{y}{TM} = \mathrm{tg}\theta = \frac{a}{e} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

当 $\Delta x \to 0$ 时,即得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{tg}\theta$,$\mathrm{tg}\theta$ 是切线斜率。

巴罗又用"$e - a$"方法研究拉梅曲线(Lame' Curve)

$$x^3 + y^3 = r^3$$

近似地有

$$(x - e)^3 + (y - e)^3 = r^3$$

$$x^3 - 3x^2e + 3xe^2 - e^3 + y^3 - 3y^2a + 3ya^2a^3 = r^3$$

把含 e^2, e^3, a^2, a^3 的项略去,用 $x^3 + y^3$ 代替 r^3,得

$$3x^2e + 3y^2a = 0$$

$$\frac{a}{e} \approx -\frac{x^2}{y^2}$$

用现在的观点看巴罗的结论,那就是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

因为由 $x^3 + y^3 = r^3$ 求得的$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$恰为 $-\frac{x^2}{y^2}$。

巴罗的工作启发牛顿意识到,$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的极限是切线的斜率。

牛顿从 1665 年开始到 1687 年,对微积分的创造性成果为:

(1) 1665 年,《正流数术》,讨论微分学。

(2) 1666 年,《反流数术》,讨论积分学。

(3) 1666 年,《流数简论》,将他的研究成果整理总结所成的论文,是历史上首篇系统的微积分文献,《流数简论》是微积分诞生的

标志。

(4) 1669 年,《运用无限项方程的分析》(简称《分析学》,由此后人称以微积分为主要内容的学科为数学分析)。

(5) 1671 年,《流数法与无穷级数》(简称《流数法》)。

(6) 1687 年,《自然哲学的数学原理》(简称《原理》)。

(7) 1691 年,《曲线求积术》(简称《求积术》)。

牛顿把一条曲线视为一个点的连续运动产生的,点的横坐标与纵坐标是变动的量;变动的量牛顿称其为流(Fluent),流的变化率称为流数(Fluxion),如果一个流,比如一条曲线的纵坐标用 y 表示,横坐标是时间 t,牛顿用“$\dot{y}$”表示 y 的流数,即 $\dot{y}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$。

牛顿在《求积术》中有如下一段关于流数的论述:

“设量 x 均匀地流动,并设问题是欲求出 x^n 的流数。

在量 x 因流动而变成 $x+o$ 的同时,量 x^n 变成 $(x+o)^n$,根据无穷级数法就等于

$$x^n + nox^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}oox^{n-2} + \&c$$

增量 o 与 $nox^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}oox^{n-2} + \&c$ 之比等于 1 比 $nx^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}ox^{n-2} + \&c$。

现在令增量消失,它们的最终比将变成 $\frac{1}{nx^{n-1}}$。”

牛顿的这段话现在的微积分中已改写成:$\Delta x \neq 0$,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[nx^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}\Delta x x^{n-2} + \&c\right] = nx^{n-1}$$

牛顿的上面一段关于导数的论证虽然有些粗糙原始,甚至今天的大学生都有些费解,但较之牛顿前辈们的关于此类问题的认识已经前进了一大段路,牛顿的概念更高明、更定型、更富于可操作性。

人们对牛顿在微积分方面的成就一片欢呼和歌颂,英国著名

诗人留下脍炙人口的诗章，诗曰：

“宇宙和宇宙规律隐藏在一片黑暗之中，

上帝说：

生出牛顿，

一切都会变得光明。”

牛顿的生日恰逢圣诞节。

作为有理性和高尚科学品格的牛顿，对诸如此类的颂扬之词的回敬是：

“我不在乎世间把我看成什么样的人，但是，我说我自己就像一个在海边玩耍的孩子，有时拾到一块比较平滑的卵石或格外漂亮的贝壳，自然感到高兴，但在我面前则是完全没有被发现的真理的大海。”“如果我比别人看得更远些，那只是因为我站在巨人的肩膀上。”

这不是牛顿的谦虚，这是事实。

想想我们前面讲过的刘徽、祖暅、阿基米德、笛卡儿、卡瓦列里、费马、帕斯卡、巴罗等诸位“巨人”对于微积分的前期工作，牛顿说得真对，牛顿具有伟人的人品。

牛顿在《求积术》中还研究了本质上是微分方程的问题：

“问题 1　已知流量的相互关系，求流数关系。

例　若量 x 与 y 的关系是 $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$，用下法先乘按 x 排列的各项，然后乘按 y 排列的各项：

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

乘以 $\frac{3\dot{x}}{x}, \frac{2\dot{x}}{x}, \frac{\dot{x}}{x}$, 0 得

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + a\dot{x}y = 0 \tag{4.3}$$

$$-y^3 + axy + (x^3 - ax^2) = 0$$

乘以 $\frac{3\dot{y}}{y}, \frac{\dot{y}}{y}$,0 得

$$-3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0 \tag{4.4}$$

式(4.3)与式(4.4)之和为

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0 \tag{4.5}$$

这方程就给出 $\dot{x}$ 与 $\dot{y}$ 之间的关系，确切地说，设 x 任意，则方程 $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ 给出 y，这些确定后，流数关系将是

$$\dot{x} : \dot{y} = (3x^2 - ax) : (3x^2 - 2ax + ay)" \tag{4.6}$$

牛顿在《求积术》中还对式(4.6)正确性给出了证明。

事实上，用现今改写后的微积分的叙述方式，若 $x = x(t), y = y(t)$，把方程

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

的两端对 t 求导则得

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + (a\dot{x}y + ax\dot{y}) - 3\dot{y}y^2 = 0$$

即得式(4.5)。

如果记 $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，用 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 去除式(4.5)得微分方程

$$3x^2 - 2ax + ay + ax\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 3y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax} \tag{4.7}$$

式(4.7)是一阶非线性常微分方程，写成对称形式得

$$(3y^2 - ax)\mathrm{d}y + (-3x^2 + 2ax - ay)\mathrm{d}x = 0$$

是一个恰当方程，积分之得

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = C$$

牛顿取 $C = 0$，得 $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$

牛顿在论证当中，一会儿用“∘”来除一个等式，即默许“∘”$\neq 0$，一会儿又令“∘”消失，这种表述的随意性和逻辑混乱授人以柄，给反对派对牛顿的非议与攻击留下了口实。

牛顿在《分析学》中给出计算曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴所夹面积的法则，即积分方法。对于 $y = ax^{\frac{m}{n}}$，牛顿证明所求$[0, x]$上的面积是

$$z = \frac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$$

牛顿在《求积术》中还用 $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ 表示二次流数，$\dddot{x}, \dddot{y}, \dddot{z}$ 表示

三次流数等。

牛顿的《原理》一书被爱因斯坦赞誉为"无比辉煌的演绎成就"。全书从力学定律出发,用微积分为工具,严格地证明了行星三大运动定律、万有引力定律等极端重大的自然科学定律,且把微积分应用于流体力学、声学、光学、潮汐乃至宇宙体系,显示出微积分这一新生数学学科的巨大威力。应用的有效性证明了牛顿发明的微积分是成功的,虽然牛顿的数学工作难免带有初创期的幼稚和不完备,但正如莱布尼兹所说:"过分的审慎不应使我们抛弃创造性的成果。"牛顿在青年时代竟有这么重大的成就,这在人类科学史上是罕见的。

牛顿的成就是他的超常勤奋以及非凡观察力的必然结果,惠威尔(W. Whewell)在《归纳科学史》中写道:"除了顽强的毅力和失眠的习惯,牛顿不承认自己与常人有什么区别。"例如"苹果落地与万有引力","煮表代蛋","看见桌子上别人啃过的骨头就说自己已经吃过饭","忘了与女友约会"等故事已是家喻户晓,虽然可能是后人杜撰,但牛顿确有此种废寝忘食超凡脱俗的敬业精神。牛顿不修边幅,不求享乐,把全部身心贡献给科学事业,推动数学与物理的历史车轮前进。牛顿终身未娶。

1727 年,牛顿因肺炎与痛风去逝,葬于威斯特敏斯特大教堂,牛顿遗留的手稿中,仅数学部分就有 5000 页之多。

下面介绍莱布尼兹及其数学成就。

莱布尼兹(Leibniz Gottfried Wilhelm, 1646—1716),德国大数学家和哲学家,生于莱比锡,其父是莱比锡大学教授,为其子莱布尼兹留下大量藏书。1661 年,莱布尼兹考入莱比锡大学,1666 年转入阿尔特多夫大学,1667 年获法学博士学位,次年任驻法大使去巴黎,在巴黎生活了 4 年。莱布尼兹许多重大的成就包括微积分就是这 4 年巴黎之行完成的。

与牛顿生于穷乡僻壤,家境贫寒,童年看不出有多少聪明相比,莱布尼兹与之形成强烈的反差,他出身书香门第,幼年即表露出超常的才智,15 岁即上了大学,20 岁即发表《论组合的艺术》的

数学论文,此文研究了数理逻辑,后来莱布尼兹成了数理逻辑的奠基人之一。

在巴黎莱布尼兹结交了荷兰著名数学家和物理学家惠更斯(C. Huygens),在惠更斯的指导下,这位法学博士客串了数学,钻研起笛卡儿、费马和帕斯卡等名家的著作。在巴黎他看到帕斯卡1642年发明的加法计算器,很受启发,莱布尼兹制造出能+、-、×、÷、$\sqrt{\quad}$的计算机,并在英国伦敦皇家学会展出,1675年在巴黎科学院进行了这种计算机的实算演示,大获成功。1673年莱布尼兹选为英国皇家学会会员。1700年选为巴黎科学院院士,同年莱布尼兹创办柏林科学院,且致力于维也纳、圣彼得堡、德累斯顿科学院的创办,还曾设想建立"世界科学院"。莱布尼兹曾写信给中国康熙皇帝建议成立北京科学院。莱布尼兹主持出版了《中国近况》一书,亲自写了序言,该书指出欧洲要向中国传授科学,应该说,莱布尼兹是最早关心中国科学事业的西方朋友。

莱布尼兹从1672年开始整理他在巴黎4年的微积分研究成果,他于1675年给出积分号"$\int$",它是求和"Sum"字头S的拉长;同年引入微分号"d"。1676年莱布尼兹得出公式

$$\mathrm{d}x^e = ex^{e-1}\mathrm{d}x \tag{4.8}$$

$$\int x^e \mathrm{d}x = \frac{1}{e+1}x^{e+1} \tag{4.9}$$

其中e是实数。

莱布尼兹指出:"式(4.8)和式(4.9)这种推理是一般的,与x可能是什么没有关系。"也就是说,x不仅可以是基本的自变量,还可以是中间变量,即x也可以是另一自变量的函数;这样,莱布尼兹给的结果其实是下面这些结论的基础:

(1) 一阶微分的形式不变性。

(2) 复合函数求导的链式法则。

(3) 不定积分的换元积分法。

1677年,莱布尼兹在他的手稿中表述了微积分基本定理:

$$\int_a^b y\mathrm{d}x = z(b) - z(a)$$

其中$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y(x)$，$y(x)$是$[a, b]$上的一条曲线。莱布尼兹明确指出$\int_a^b y\mathrm{d}x$ 表示曲线$y(x)$与$[a, b]$之间的面积。

1684年，莱布尼兹发表微分学论文《一种求极大与极小值和求切线的新方法》（简称《新方法》），此文发表于《教师学报》，是数学史上首篇正式发表的关于微积分的文献（牛顿得到的微积分成果比莱布尼兹稍早，但正式发表则较迟些）。

在《新方法》一文中，莱布尼兹称他1677年已得到公式

$$\mathrm{d}(z - y + w + x) = \mathrm{d}z - \mathrm{d}y + \mathrm{d}w + \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(xv) = x\mathrm{d}v + v\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{v}{y}\right) = \frac{y\mathrm{d}v - v\mathrm{d}y}{y^2}$$

$$\mathrm{d}x^a = ax^{a-1}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}\sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b}\sqrt[b]{x^{a-b}}\mathrm{d}x$$

后来莱布尼兹又得出高阶微分公式的"莱布尼兹法则"

$$\mathrm{d}^n(uv) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i(\mathrm{d}^i u)(\mathrm{d}^{n-i} v)$$

莱布尼兹的这些工作，牛顿在大体相同的时间以不同的表述方法也得出来了，只是牛顿忙于把这些数学工具用于力学与物理，没有及时总结成文章去发表。另外，牛顿搞微积分的实际背景是力学的，而莱布尼兹则是从几何背景（例如切线，面积）来研究微积分，两者几乎是同时操作，独立完成，殊途而同归；对于微积分的基本概念与方法，牛顿发现的稍早，而莱布尼兹发表的稍早。

《新方法》中有应用微分法求极大值、极小值和拐点的方法，莱布尼兹把微积分应用于光学后颇为得意地说："凡熟悉微分学的人都能像本文这样魔术般做到的事，却曾使其他渊博的学者百思不

得其解。"

1686年,莱布尼兹发表积分学论文《深奥的几何与不可分量及无限的分析》,此文阐明积分与微分的逆运算关系,而且在此文中首次使用今日我们使用的那些微积分符号。

关于微积分发明的优先权之争使牛顿和莱布尼兹两位微积分的领袖人物光彩受损,其实应该说是各自在差不多相同的时间内的独立创造,不宜非得分出个我先你后。在人类科学的历史上,一些重大的发现往往是历史条件成熟时由不同国度不同的人物相互独立得出的。

就微积分而言,牛顿在1687年以前并未公开发表任何有关微积分的文章,而莱布尼兹则于1684年和1686年分别先于牛顿发表了关于微分与积分的两篇重要文章,可见文章的发表莱布尼兹领先于牛顿,但牛顿对微积分的发现确实领先于莱布尼兹.而且莱布尼兹对牛顿有很高的评价。1701年在柏林王宫的宴会上,当普鲁士王问莱布尼兹如何评价牛顿时,莱布尼兹答:"综观有史以来的全部数学,牛顿做了一多半的工作。"牛顿对莱布尼兹也有公正的评价,牛在《原理》的前言中称:"十年前,我在给学问渊博的数学家莱布尼兹的信中曾指出:我发现了一种方法,可以用来求极大值、极小值、作切线以及解决其他类似的问题,而且这种方法也适用于无理数。这位名人回信说他也发现了类似的方法,并把他的方法给我看了。他的方法与我的大同小异,除了用语、符号、算式和量的产生方式外,没有实质性区别。"

可见牛顿也承认莱布尼兹与他同时发现了微积分。

但是,一场影响很不好的"优先权"之争还是发生了,它是由局外人扳弄是非引发的;1699年一位瑞士数学家N.F.德丢勒在一本小册子中提出"牛顿是微积分的第一发明人",莱布尼兹则是"第二发明人","曾从牛顿那里有所借鉴",尤其后面这句话,使得德国人十分不满。1712年,英国皇家学会还专门成立一个"调查委员会",并于第二年公布了一份《通报》,宣布"确认牛顿为第一发明人。"这种事态引起了莱布尼兹的申诉,双方争论愈演愈烈,指责对

方的话说得十分难听。这实在是“科学史上最不幸的一页”，使得18世纪英国数学家与欧洲大陆数学家分道扬镳，英国数学坚持牛顿原始创新的那种传统不肯改进，远离了数学分析逐渐完善的主流，分析数学的主流与中心移到了德国与法国，不必要的“优先权”之争使英国数学受到了损失。

莱布尼兹是百科全书式的天才，在分析数学和离散数学的各个领域都有举足轻重的贡献，他不仅是伟大的数学家，还卓有成效地涉猎于哲学、历史、自然科学和工程技术各领域，并慷慨从事慈善事业，一生孜孜不倦，勤奋忘我，终生未娶。

莱布尼兹的哲学思想十分混乱，他有不满和反对封建神学和经院哲学的进步的科学思想的一面，对宗教也有软弱妥协的一面。事实上，在当时德国宗教势力猖獗横行的年代，莱布尼兹唯一的选择是“披着宗教外衣”反宗教，口中念叨着上帝存在、有神论的咒语，思想里设计着符合自然规律的微分和积分，用合乎理性的哲学来替代那种占统治地位的由御用文人杜撰出来的神秘的“野蛮哲学”或曰“愚昧哲学”。莱布尼兹充其量只是半个基督徒，大半是一个追求真理的科学家，他企图用理性代替愚昧的信仰，用科学限制上帝的万能，为科学的发展与反动统治和迷信争夺地盘。

3　第二次数学危机

1734年，英国哲学家、牧师伯克莱（George Berkeley，1685—1753）发表了在科学史上曾引起轩然大波的小册子《分析学家，或致一位不信神的数学家》，不信神的数学家指帮助牛顿出版《原理》的哈雷（E. Halley），主要矛头指向牛顿的流数方法，对莱布尼兹的微积分也同样竭力非难。

事实上，在伯克莱发难之前，由于牛顿和莱布尼兹的微积分逻辑基础不严密，特别是在无穷小概念上的混乱，就引起过不少科学家的批评，例如荷兰物理学家纽文蒂（B. Nieuwenty，1654—1718）就

曾指责牛顿的流数术阐述不清,莱布尼兹的高阶微分缺乏根据等。

伯克莱的责难(且不论其动机为何)是切中要害的,客观上激起18世纪、19世纪的数学家为数学分析的严格化进行了卓越的工作。

下面摘抄伯克莱的一些言论片断:

“流数方法是一把通用的钥匙,当代数学家们借助于它来解开几何学的、最终也是大自然的奥秘。这一方法使数学家们能够在发现定理和解决问题方面大大超越古人。正因为如此,其发挥、应用便成为古今那些号称深刻的几何学家们主要的(如果不是唯一的)事业。然而这些方法究竟是否清楚,是否没有矛盾,并且可以加以证明;或者相反,只是一种含糊的、令人反感的和不可靠的方法?我将以最公正的方式来提出这样的质疑,以便让你们,让每一位正直的读者作出自己的判断。”

“一种推导任意次幂的流数的方法如下:设量 x 均匀地流动,欲求 x^n 的流数,与 x 通过流动变为 $x+o$ 的同时,幂 x^n 变成 $(x+o)^n$,也就是说,使用无穷级数的方法有

$$x^n + nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2} + \&c$$

而增量 o 与 $nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2} + \&c$ 之比为

$$1 : nx^{n-1} + \frac{nn-n}{2}ox^{n-2} + \&c$$

现在假设增量消失,它们最终之比将是 $1 : nx^{n-1}$。

然而这种推理看来是不合理和不能令人信服的。**因为如果让增量消失,亦即让增量变为零,或者说没有任何增量,那么原来的关于增量存在的假设也就不能成立,而由这一假设引出的结果即借助于增量而得到的表达式却必须保留**,这种推理是站不住脚的。因为我们如果假设增量消失了,理所应当也就必须假设它们的比、它们的表达式以及由于假设其存在而导出的一切东西都必须随之消失。”

“我所非议的不是您的结论,而是您的逻辑和方法:您是怎样

进行证明的？您所熟悉的对象是什么？关于它们您的表达是否清楚？您依据的原理是什么？它们是否可靠？您是如何应用它们的？”

“这些消逝的量是什么呢？它们既不是有限，也不是无限小，又不是零，难道我们不能称它们为消逝量的鬼魂吗？”

后来，伯克莱把话说得更难听，伯克莱说：“分明是诡辩，是招摇撞骗，把人们引入歧途。”

上述引文中黑体字的那句称为“伯克莱悖论”。伏尔泰则使用文学的语言讽刺道：“微积分是计算与度量一个其存在性是不可思议的事物的艺术。”

对于莱布尼兹，伯克莱也进行了不留情面的批评：“莱布尼兹及其追随者，在进行微分运算时，竟从不脸红地首先承认然后舍弃无穷小量，稍具思考能力的人，在理解时仔细一点，在推理时公正一点，就不会接受这些。”

伯克莱的上述口诛笔伐，引起了支持牛顿与莱布尼兹的多位数学家奋起反击，写了不少反驳伯克莱的文章，但仍然不能把当时微积分中的症结搞清楚，一时间，伯克莱的“反微积”言论似乎占了优势，事实上伯的许多批评确实指出了当时微积分在逻辑上与基础上存在的漏洞，牛顿与莱布尼兹的辩护失败，此即历史上耸人听闻的第二次数学危机。

从第一次数学危机的后果来看，我们有经验地说，悖论和数学危机并非什么可怕的事，它恰是数学发展的重要机遇，是即将有重大突破的先兆。第二次数学危机激发了 18 世纪、19 世纪的众多数学家为微积分的完善作了大量出色的工作，促使微积分日臻完备，排除了第二次数学危机。

公正地讲，伯克莱发动对牛顿、莱布尼兹的非难，其动机绝不是为了完善和发展微积分，他不具有这种能力，也没有这个善意，他的动机很可能是使微积分消亡，这是他的宗教牧师地位所决定的。另一方面，他对牛顿与莱布尼兹指责的理由是成立的，当时牛莱二人确有“偷换假设”（说 o 可以去做除数，即 $o\neq0$，同

时又说 o 消失，即 $o=0$)的“粗糙推理”，当时的微积分确实存在着概念不清的毛病，证明也不严密！但是，对力学、物理等领域用上这种基础并未夯实的微积分，却总是取得与实际相吻合的重大成果，法国大数学家达朗贝尔豪爽地说：“向前进，你就会产生信念。”数学家们不顾伯克莱们的挑剔，大家受到微积分有大用的鼓舞，继续在不牢的基础上建筑微积分的大厦，他们眼前需要收获的东西太多，无暇顾及去修补基本理论，基础问题只好先放一放再说了。

当数学家们忙着对微积分如蘑菇般成堆生长着的众多成果收获到一定限度，时间到了伯克莱发难十几年之后，开始认真地补打微积分的基础，到 19 世纪末，基本完成了微积分严格化的工作。

4　微积分发展与完善的历程

经过 18 世纪、19 世纪众多数学家的精细研究，微积分不仅硕果累累，而且概念更为准确，理论更为严密了。

在英国，有牛顿的信奉者泰勒(B. Taylor, 1685—1731)、麦克劳林(C. Maclaurin, 1698—1746)、棣美弗(A. de Moivre, 1667—1754)、斯特林(J. Stirling, 1692—1770)等一大群著名数学家，他们在剑桥大学、牛津大学、爱丁堡大学等名校教授和研究牛顿的流数术。

1715 年，英皇家学会秘书长泰勒出版《正的和反的增量方法》一书，给出原始的泰勒展开式，不过当时泰勒使用他的展开式时并没有讨论它的收敛性，这也许是与牛顿一脉相承的不注重严格性的毛病。后来爱丁堡大学的麦克劳林考虑了泰勒公式中“独立变量”为零处的泰勒展式，得到了麦克劳林公式。麦克劳林是牛顿流数术的捍卫者，他的代表作《流数论》以几何语言论证牛顿的流数术，可惜未获成功。自麦克劳林之后，由于微积分发明权之争激发的英伦三岛上数学家的狭隘民族情绪，使英国数学家们缚束于牛

顿初创的不甚严格的传统微积分之中,不肯与欧洲大陆的新分析相交融,遂使英国的数学发展受到不小的损失。而在德国和法国等地,新的数学分析却在莱布尼兹的后继者们的努力之下,蓬勃地发展起来。

18 世纪微积分的最主要成就体现在欧拉的下列 3 部微积名著之中:

(1)《无限小分析引论》,两卷集,1748。

(2)《微分学》,两卷集,1755。

(3)《积分学》,三卷集,1768—1770。

(1)、(2)、(3)是数学史上里程碑式的巨著,在 18 世纪到 19 世纪里,世界各国把这 3 种著作当作最佳教材在各著名大学讲授,培养了好几代数学家。现今分析中的标准符号,例如 $f(x)$, $\sum$,e,i 等都出自这 3 大名著。

欧拉(L. Euler,1707—1783),生于瑞士巴基尔城郊,其父是牧师,爱好数学,是欧拉的数学启蒙教师。欧拉 13 岁人巴基尔大学,欧拉的数学老师是大数学家约翰·伯努利(Johann Bernoulli,1667—1748)和雅各布·伯努利(Jacob Bernoulli,1654—1705)两兄弟,师生间情谊极深,欧拉又结交了约翰的两个儿子尼古拉·伯努利(Nicolaus Bernoulli)和丹尼尔·伯努利(Daniel Bernoulli),后来尼古拉和丹尼尔也成了著名的数学家。到 19 世纪中叶,伯努利家族中出了十几位著名的数学家,是历史上令人羡慕的科学世家,初等微积分中大部分内容出自雅各布和约翰之手。

英国斯科特在其所著的《数学史》论及伯努利家族时写道:"这个天赋聪颖的家族几乎对数学的每个分支都作出过最有价值的贡献,欧洲大陆上微积分的迅速发展多半应归功于他们的热情和才能。"

在约翰·伯努利的严格教导之下,欧拉 17 岁便获硕士学位,且成为约翰的助手。

对欧拉的突出的数学才能,约翰·伯努利十分赏识,约翰在一封给欧拉的信中写道:"我讲授高等分析时,这门学科还是个孩子,

而您正在将它带大成人。"

1725 年,圣彼得堡科学院成立,尼古拉·伯努利和丹尼尔·伯努利双双聘为彼得堡科学院教授。1727 年,欧拉应邀到圣彼得堡科学院工作。1733 年,26 岁的欧拉接替返回瑞士的丹尼尔,成为数学教授和圣彼得堡科学院数学部领导人。1735 年年仅 28 岁的欧拉右眼失明。

1741 年欧拉被邀到柏林科学院任物理数学所所长,1759 年,欧拉成为柏林科学院领导人。

欧拉是历史上成果最多的数学家,生前发表的著作和论文 560 余种,且留下大批未发表的手稿,欧拉去世后的 80 年间彼得堡科学院不断发表欧拉的遗著。1911 年,瑞士开始出版《欧拉全集》,计划出 84 卷,皆四开大册。1771 年,圣彼得堡科学院遭受火灾,64 岁的欧拉险些葬身火海,但他的部分研究成果化成灰烬,不然欧拉的数学成果会更加丰硕。56 岁时,欧拉的左眼亦失明,他在黑暗中拼搏了 20 年,完全凭着惊人的记忆和心算进行研究和写作,由子女(欧拉是 13 个子女的父亲)笔录,在这种情况下的作品约占他一生作品的一半。

1783 年 9 月 18 日,欧拉与同事讨论与计算天王星轨道时突然烟斗坠地,正如法国数学家康多塞(Condorcet)所感叹:"欧拉停止了计算,也结束了生命!"

美国数学家塞蒙斯说:"自 1748 年以来,所有的微积分教材,基本上是抄袭欧拉的《无穷小分析引论》、《微分学》和《积分学》,或者是抄袭那些抄袭欧拉这 3 部书的书。"

欧拉的文笔轻松易懂,总是把他深刻丰富的思想和广泛的兴趣写得有声有色。他喜欢搞特定的具体问题,而不是一味热衷于一般理论。除了微积分而外,对于微分方程还提供了降阶法、幂级数解法、积分因子法等等重要解法;1736 年,欧拉解决了哥尼斯堡七桥问题而开创了图论与拓扑学;至于欧拉在数论与函数论以及物理学当中的贡献如此之多,以至于一些著名的定律人们认为不必再注明是欧拉首次提出的了;例如著名公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$。

1774年,欧拉出版《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧》一书,使新的学科变分法诞生,“变分法”一词1766年首次使用。欧拉是复变函数论的先驱者。1742年,欧拉与哥德巴赫通信时提出了今日所称的“哥德巴赫猜想”。欧拉在概率论、微分几何、代数拓扑等领域亦有重大贡献。1770年出版的欧拉名著《代数学完整引论》是欧洲几代人的教科书。对“三体问题”欧拉进行了开创性的数学理论分析。在天文力学方面的著作有:

(1) 1744年,《行星和彗星的运动理论》。

(2) 1753年,《月球运动理论》。

(3) 1754年,《日蚀的计算》。

(4) 1736年,《力学,或解析地叙述运动的理论》。

(5) 1752年,《流体运动原理》。

(6) 1755年,《流体运动的一般原理》。

欧拉还有大量关于物理学、建筑学、弹道学以及哲学、音乐和神学的著作。

当代“欧拉问题”专家,瑞士科学院的埃米尔·费尔曼对于欧拉有如此巨大成就的原因总结出3点:①惊人的记忆力;②罕见的聚精会神的能力;③孜孜不倦。

极限的严格定义和极限的性质是整个微积分的基础,1821年,法国大数学家柯西给出极限的定义,且建立了柯西收敛准则,1817年,捷克数学家波尔查诺(Bolzano Bernard,1781—1848)写出名著《纯粹分析的证明》,给出了函数连续性的现代定义方式,德国著名数学家外尔斯特拉斯的工作(例如极限定义的“$\varepsilon-\delta$”方式)使极限的瑞论和函数连续理论更为完善;柯西、外尔斯特拉斯和波尔查诺对微积分的严格化有不可磨灭的贡献。

柯西(Cauchy Augustin Louis,1789—1857),巴黎人,其父结识的朋友中有大数学家拉格朗日和拉普拉斯,两位数学家看透了少年柯西的才能,两人预言:“此子必将是一个了不起的人才。”柯西16岁考人巴黎理工大学,就读于道路桥梁学院,毕业后当

了建筑工程师。但柯西对数学兴趣最浓，在建筑工程的旅途中，他行囊中总背着拉普拉斯的《天体力学》和拉格朗日的《解析函数论》。1816 年开始任巴黎理工大学、巴黎大学和法兰西学校教授。

19 世纪数学分析严格化最有影响的先驱者是柯西，他在这方面的代表作有：

(1)《分析教程》，1821 年。

(2)《无穷小分析教程概论》，1823 年。

(3)《微分计算教程》，1829 年。

在他的著作当中，对极限、无限小、函数连续性、级数收敛性、导数与微分、定积分、微积分基本定理和中值定理都有精辟的论述。

下面引述柯西的历史性论述的原话(引自参考文献[7])：

(1) 极限与无限小。“当同一变量逐次所取的值无限趋向于一个固定的值，最终使它的值与该定值的差要多小就多小，那么最后这个值就称为所有其他值的极限。”

“当同一变量逐次所取的绝对值无限减小，以致比任何给定的数还小，这个变量就是所谓的无限小或无限小量，这样的变量将以 0 为极限。”

(2) 函数的连续性。“设 $f(x)$ 是变量 x 的函数，且设介于两个给定限之间的每个 x 值，该函数总有一个唯一的有限值。如果在这两个给定限之间有一个 x 值，当变量 x 获得一个无限小增量 α，函数本身将增加一个差量

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

这个差同时依赖于新变量 α 与原变量 x 的值。然后，如果对变量 x 在两给定限之间的每个中间值，差 $f(x+\alpha)-f(x)$ 的绝对值都随 α 的无限减小而无限减小，那么就说函数 $f(x)$ 是变量 x 在这两个限之间的一个连续函数。换言之，函数 $f(x)$ 在给定限之间关于 x 保持连续，如果在这两个限之间变量的每个无限小增量总产生函数 $f(x)$ 本身的一个无限小增量。进一步，我们说函数 $f(x)$ 是

变量 x 在 x 的某个特殊值的邻域内的连续函数，如果它在包含该 x 值的任意接近的两限之间连续。”

(3) 级数的收敛性。“一个序列是量 $u_0, u_1, u_2, u_3, \cdots$ 的一个无限延续，其中各量按某个确定的法则分别先后。设

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$$

是该序列的前 n 项之和，如果和 S_n 随 n 的增大而趋向一个确定的极限，那么就说这个级数收敛，这个极限就叫做该级数的和。反之，如果部分和 S_n 随着 n 的无限增大并不趋向于任何确定的极限，则级数是发散的，它没有和。

级数

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots$$

收敛的充分必要条件是：当 n 无限增大时，和 $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$ 趋向于一个确定的极限。换句话说，该级数收敛的充分必要条件是：对于无限大的 n 值，和 $S_n, S_{n+1}, \cdots$ 与有限数 S 之差，从而它们相互之差，是无限小量。”

(4) 导数与微分。“如果函数 $y = f(x)$ 在变量 x 的两给定限之间连续，并在这两个限之间指定变量的一个值，那么这个变量的一个无限小增量 Δx 将产生函数本身的一个无限小增量。设 $\Delta x = h$，则下列差商

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

中的分子分母两项均为无限小量。虽然这两项同时趋于零，但比值本身却可以收敛于另一个极限，这个极限，如果存在的话，对每个特殊的 x 值都将有一个确定的值，但这个值将随 x 的变化而变化。这样，例如我们取 $f(x) = x^m$，m 是一个(正)整数，则无限小差的比将是

$$\frac{(x+h)^m - x^m}{h} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} h + \cdots + h^{m-1}$$

其极限等于量 mx^{m-1}，也就是说是变量 x 的一个新的函数。同样的事实普遍成立，只是作为比 $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ 的极限的这个新函

数的形式将随已给函数 $y=f(x)$ 的不同而不同。为了表明这种依赖关系，我们称这个新函数为导函数，并用带撇的符号 y' 或 $f'(x)$ 来表示它。”

“设 $y=f(x)$ 是一个独立变量 x 的函数；设 h 为一个无限小量，而 k 为一个有限量，设 $h=\alpha k$，那么 α 将是一个无限小量，同时有恒等式

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(x+\alpha k)-f(x)}{\alpha k}$$

因此可得

$$\frac{f(x+\alpha k)-f(x)}{\alpha}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}k \qquad (4.10)$$

当变量 α 趋于零而 k 保持不变时，方程(4.10)左端所收敛的极限叫作函数 $y=f(x)$ 的撇分，我们用符号 d 来表示这个微分，记成

$$\mathrm{d}y \quad \text{或} \quad \mathrm{d}f(x)$$

如果我们已经知道导函数 y' 或 $f'(x)$ 的值，那就很容易得到微分的值。事实上，在方程(4.11)两边取极限，我们就得到一般结论

$$\mathrm{d}f(x)=kf'(x) \qquad (4.11)$$

在 $f(x)=x$ 这一特殊情形，方程(4.11)变成

$$\mathrm{d}x=k\text{''}$$

(5) 定积分。“设函数 $y=f(x)$ 关于变量 x 在两个有限界限 $x=x_0$ 和 $x=X$ 之间连续，我们用 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 来表示 x 的位于这两个限之间的一些新值，并假定它们在第一限与第二个限之间或者总是递增，或者总是递减。我们可以用这些值把差 $X-x_0$ 划分成元素

$$x_1-x_0,\ x_2-x_1,\ x_3-x_2,\ \cdots,\ X-x_{n-1}$$

这些元素都有相同的符号。我们将每个元素与该元素左端点所对应的 $f(x)$ 的值相乘，即元素 x_1-x_0 乘以 $f(x_0)$，元素 x_2-x_1 乘以 $f(x_1)$，…，元素 $X-x_{n-1}$ 乘以 $f(x_{n-1})$，设

$$S=(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\cdots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1})$$

显然 S 将依赖于:

① 差被分成的元素的个数 n。

② 这些元素的值,从而也就依赖于所采用的划分方法。

如果这些元素的值变得非常小而数 n 变得非常大,那么划分方法对 S 的值将没有实质性影响。

这样,如果我们让这些元素的值随着它们个数的无限增加而无限减小,那么就一切实用的目的而言,S 的值最终将变成常数,或者说,它最终将达到一个确定的极限,这个极限值仅依赖于函数 $y=f(x)$ 和边界值 x_0 与 X,这个极限叫做定积分。"

(6) 微积分基本定理。"在定积分

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\mathrm{d}x$$

中,我们假设两个积分限之一,例如 X 是可以变的,积分本身将随着这个量的变化而变化,如果用 x 来代替这个现在已成为可变的积分限 X,我们就得到 x 的一个新函数,设

①

$$\mathscr{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x$$

是这个新函数,由公式

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\mathrm{d}x = (X - x_0)f[x_0 + \theta(X - x_0)]$$

可推得

② $\mathscr{F}(x) = (x - x_0)f[x_0 + \theta(x - x_0)], \mathscr{F}(x_0) = 0$

θ 是小于 1 的非负数。

由公式

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\xi}^{X} f(x)\mathrm{d}x \quad (x_0 \leqslant \xi \leqslant X)$$

可推得

$$\int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)\mathrm{d}x - \int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x = \int_{x}^{x+\alpha} f(x)\mathrm{d}x = \alpha f(x + \theta\alpha)$$

或

③

$$\mathscr{F}(x+\alpha)-\mathscr{F}(x)=\alpha f(x+\theta\alpha)$$

如果 $f(x)$ 从 $x=x_0$ 到 $x=X$ 保持有限且连续，公式③两边除以 α，则通过取极限可以得到

$$\mathscr{F}'(x)=f(x)$$

这样，积分①作为 x 的函数将以积分号 $\int$ 下的函数 $f(x)$ 为其导函数。”

(7) 中值定理。“设 $f(x)$ 是变量 x 的一个实函数，且在 $x=x_0$ 与 $x=X$ 之间关于该变量连续，如果两个量 $f(x_0)$ 与 $f(X)$ 符号相反，那么在 x_0 与 X 之间至少有一个 x 的实数值满足方程

$$f(x)=0”$$

通过柯西一系列的艰巨工作，再经外尔斯特拉斯的改进，建立了数学分析巩固的基础，结束了几百年来微积分的混乱局面，彻底排除了第二次数学危机。

阿贝尔当时赞叹柯西“是当今懂得应该怎样对待数学的人。”

柯西的研究不仅限于微积分，他的研究几乎遍及数学的方方面面，在复变函数论方面，1825 年他的论文《关于积分限为虚数的定积分的报告》，被人们视为科学史最为瑰丽的一页！他还创造了留数的概念，大大发展了复变函数的理论。1821 年，他证明了正多面体只有 5 种以及公式 $\epsilon+2=\varphi+\nu$，其中 ϵ 是多面体的棱数，φ 是面数，ν 是顶数，当年他只有 22 岁。

柯西死后，搜集到他的论文 800 多篇，出版了《柯西全集》26 卷，其数量之大，仅次于欧拉，名列世界第二。

柯西生前乐善好施，他常常把工资捐赠给穷人，是个虔诚的慈善家。

外尔斯特拉斯(Karl Weierstrass，1815—1897)是微积分严格化的又一功臣。生于德国威斯特伐利亚，1829 年考入天主教办的文科中学，1834 年中学毕业，获甲等前三名毕业文凭，其父要求外尔

斯特拉斯长大后进入普鲁士文官阶层,1834年把他送入波恩大学攻读财务管理专业。外尔斯特拉斯不喜欢其父为他选的专业,并不认真去读那些专业书,而是把兴趣放在数学上。在校期间,他研读了拉普拉斯的《天体力学》和雅可比的《椭圆函数新理论基础》,他立志成为数学家,1838年,他放弃了法学博士候选人的机会,不拿学位,离开了波恩大学。

1841年,外尔斯特拉斯成了一名普通的文科初级中学教员,除数学外,还教过物理、历史、地理、书法、植物和体育。

1854年,外尔斯特拉斯在《纯粹与应用数学杂志》发表《阿贝尔函数论》的论文,这篇出自名不见经传的中学教师的杰作,引起数学界的瞩目,大数学家J. 刘维尔(Liouville)称这篇文章是“科学中划时代的工作之一”。哥尼斯堡大学授予他名誉博士学位,在授学位大会上,校长说:“外尔斯特拉斯是我们大家的老师。”1856年,柏林皇家综合工科学校任命他为数学教授,同年这位当了15年文科初级中学教员的外尔斯特拉斯当选为柏林科学院院士,1864年聘为柏林大学教授。1873年,任柏林大学校长。

外尔斯特拉斯身体极健康,高龄至八旬智力仍未见衰退,终生未娶,德国人民视外尔斯特拉斯为德意志民族的骄傲。他一生除巨大的数学成就之外,还培养了大批出色的学生,例如俄国来的天才女生柯瓦列夫斯卡娅是外尔斯特拉斯的早期弟子之一,由于当时不许女生到大学听课,外尔斯特拉斯就每周抽两天给她单人授课达4年之久,1888年,柯瓦列夫斯卡娅以刚体绕定点运动的数学力学论文而获大奖。外尔斯特拉斯与柯瓦列夫斯卡娅情同父女,在科学史上传为佳话。

1861年,外尔斯特拉斯给出如下函数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

其中$0 < a < 1$,b为奇数,且$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$,他证明此函数点点连续但点点不可微,使数学界大为震惊,这个例子告诫人们,看数学不

能仅凭眼睛！外尔斯特拉斯企图建立一种不依赖于直观的纯粹的算术化的微积分，他得到了成功，终于使微积分达到了今日这般严密的形式。

下面引用[7]外尔斯特拉斯 1861 年数学笔记中关于微积分的几段原话，从中可以看出他是如何首次用"$\varepsilon-\delta$"语言给出微积分的一些最基本的现代定义的。外尔斯特拉斯被数学界誉为"现代分析之父"。

"如果 $f(x)$是 x 的函数，且 x 是一个确定的值，则若 x 变至 $x+h$，函数就会变至 $f(x+h)$，差 $f(x+h)-f(x)$称为该函数由自变量从 x 到 $x+h$ 的改变所产生的改变量。现在如果能对 h 确定一个界限 δ，使对其绝对值小于 δ 的所有 h 值，$f(x+h)-f(x)$变得小于无论怎样小的任一量 ε，则称自变量的无穷小改变对应出函数的无穷小改变。因为如果一个量的绝对值能变得小于任意选取的无论怎样小的量，则我们说它能变为无穷小。现在如果一个函数对自变量的无穷小变化，总对应出此函数的无穷小改变，则称它为此自变量的连续函数，或称它随着此自变量连续地改变。"

今日微积分教材中关于连续函数的定义就是把上述外尔斯特拉斯的"$\varepsilon-\delta$"型定义稍加改写而成的：

对于在 x_0 点的某邻域有定义的函数 $f(x)$，任意给定一个正数 ε，存在一个 $\delta(\varepsilon)>0$，使得当$|x-x_0|<\delta$ 时，不等式

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

成立，则称 $f(x)$在 x_0 点连续。

关于连续函数，外尔斯特拉斯给出下列性质定理：

"**定理**　如果 x 的连续函数对自变量的确定值 x_1 具有确定函数值 y_1，而对另一确定值 x_2，具有确定的函数值 y_2，又如果 y_3 是位于 y_1 与 y_2 之间的任意值，则在 x_1 与 x_2 之间至少有一个值 x_3，对于它函数取值 y_3。"

关于微分与微商，外尔斯特拉斯写道：

"当 x 变至 $x+h$ 时，函数 $f(x)$所产生的全改变量 $f(x+h)-f(x)$一般可分解为两个部分，第一部分正比于自变量的改变量，

因此它由 h 和不依赖于 h 的一个因子(即关于 h 是常量)组成，从而它当 h 变为无穷小时也变为无穷小，或随 h 同时变为无穷小。然而另一部分当 h 变为无穷小时不仅自身变为无穷小，当除以 h 时仍变为无穷小。

如果 h 表示一个可取无穷小值的量，且 $\varphi(h)$是 h 的具有下述性质的任一函数：对无穷小 h 值，它也变成无穷小(即当选取一个确定的任意小量 $\varepsilon>0$，总能确定一个量 δ，使其绝对值小于 δ 的所有 h 值，$|\varphi(h)|$变得小于 ε)，则可能发生$\frac{\varphi(h)}{h}$仍是 h 的函数，它本身对无穷小 h 值也变成无穷小；在此情形，我们称 $\varphi(h)$ 对无穷小 h 值相对于 h 变为无穷小。

函数全改变量正比于自变量改变量的第一部分，称为微分改变量或微分，并以刻画其特性的 d 置于函数前表示，而前缀 Δ 则表示全改变量。对于 x，我们也类似写为 $\mathrm{d}x$，因为 x 的最简单的函数是 x 自身，而 $\mathrm{d}x$ 是完全不依赖于 x 能变为无穷小的量。$\mathrm{d}x$ 或 h 取得越小，微分改变量与全改变量差异越少；通过减小 $\mathrm{d}x$ 能使此差别小于每个无论怎样小的量；因此人们定义微分为函数当其自变量改变一无穷小值时所产生的改变量。

这样，函数的微分一般具有形式 $\mathrm{d}f(x)=p\mathrm{d}x$，$p$ 是为得到函数的微分必须乘以自变量微分的因子，称为微分系数或微商。它一般也是 x 的函数。由于它由 $f(x)$的确定的方式导出，所以称为函数的导数并写成 $f'(x)$，于是这个函数得以完成且不依赖于自变量的改变量。

如果以自变量的微分除函数的微分，则得到微分系数，基于这一理由，它也称为微商：

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=p=f'(x)。"$$

外尔斯特拉斯还给出级数一致收敛性的概念与理论。

在牛顿与莱布尼兹之后微积分的完善工作中，尚有下列重要成果应该载入史册。

1696 年，法国数学家洛比达在他的名著《无穷小分析》中给出

求极限的洛比达法则。

法国数学家罗尔（于1691年）、拉格朗日（于1797年）、柯西（于1821年）分别建立了如今以他们的名字命名的一套中值（微分学基本）定理。

1821年，柯西在《分析教程》中给出无穷积分与瑕积分的概念与计算方法。

1769年，欧拉建立平面有界区域上二重积分的理论（牛顿在《自然哲学的数学原理》）中已讲到重积分的概念）。

1773年，拉格朗日研究旋转椭圆的引力时，用了三重积分，且首次使用球坐标。

1828年，俄国数学家奥斯特洛格拉德茨基和德国数学家高斯建立了联系三重积分与曲面积分的所谓“奥一高定理”。

1828年，英国数学家格林给出二重积分与曲线积分关系的格林公式。

1854年，英国数学家斯托克斯建立了空间曲线积分与曲面积分关系的斯托克斯公式。

1841年，德国数学家雅可比给出 n 个 n 元函数偏导数组成的雅可比行列式。

此外，法国的众多数学家，例如克莱洛（A.C. Clairaut，1713—1765）、达朗贝尔（J.B.L.R.d' Alembert，1717—1783）、蒙日（G.Monge，1746—1818）、勒让德（A.M. Legendre，1752—1833）、拉普拉斯（P.S.M.de Laplace，1749—1827）等人，对微积分也都做出了卓越的贡献，终于使微积分园地开出了今日这般繁荣完美的数学之花。

第五章　离散数学与第三次数学危机

逻辑并非不毛之地，它生长着矛盾！

——庞加莱

1　集合论与第三次数学危机

集合是全部数学的最基本概念之一，是整个数学大厦的基础，数学的每个分支都在使用集合论的语言进行表述与推理。

集合是一个原始概念，最初是从分析数学中产生的。

1854年，德国数学家黎曼（Riemann Georg Friedrich Bernhard, 1826—1866）在傅氏级数的研究当中，得出结论说："若$f(x)$在区间上除有限个第一类间断点外是连续的，则在连续点，函数的三角级数收敛到函数值。"这时需要考虑这些连续点的整体，于是人们逐渐产生了点的集合的原始概念；对集合概念的提出，起首要作用的人物是德国大数学家康托尔，他是数学史上一致承认的集合论的创始人，1871年，他给出集合的第一个定义，且引入点集的极限点、闭集、开集、交集、并集等概念，1874年，康托尔证明了代数数集与有理数集的可数性和实数集的不可数性，同年构作了一个"线段三等分弃中"无穷次操作生成的所谓"Cantor尘集"，1878年他又引入集合"势"的概念，且证明了Cantor尘集与实数集等势而不可数，但其测度为零。

康托尔的工作具有革命性，一时难以被多数数学家接受，但数学的历史已有结论表明康托尔的集合论是分析数学和离散数学不可或缺的有力工具。

德国大数学家希尔伯特（Hilbert David, 1862—1943）欢呼康托

尔的集合论“创立了数学上最广泛、最有力的一个部门，一个没有人能把我们赶出去的天堂。”

康托尔(Georg Cantor,1845—1918)，生于俄国彼得堡的一个丹麦犹太混血的富商家庭中。1856年康托尔随其父迁居德国法兰克福。17岁入苏黎世大学，后转入格丁根大学和法兰克福大学。在大学里康托尔有幸师从外尔斯特拉斯、库默尔和克罗内克，特别是受了外尔斯特拉斯的影响而专攻纯粹数学，1866年获博士学位。1879年任哈雷大学教授，主持哈雷大学的数学讲座。1891年，康托尔组建德国数学家联合会，任第一任主席。1904年，伦敦皇家学会授予他最高荣誉：西尔威斯特(Sylvester)奖章。

康托尔的老师克罗内克是个“有穷论者”，他反对康托尔的“超穷数”观点，他不仅对康托尔的学术工作粗暴攻击，还竭力阻止康托尔去柏林大学工作，由于克罗内克的权威地位，使其他数学家也跟着克罗内克群起攻击康托尔的工作，致使康托尔于1884年患了严重的抑郁症；同时来自集合论中的悖论和连续统假设等数学难题又一筹莫展，再加上一妻五子，家庭收入微薄而面临的经济困难，使他的身体每况愈下，多次长时间住院治疗，在哈雷大学的精神病诊所里度过了漫长的时期，于1918年死于抑郁症！

康托尔这个人是数学界的奇才，他对数学的新奇思路和独特创造以及丰富的想象力，成了当时数学界有争议的人物，但最终却成了后世数学家学习与敬仰的模范。

1883年，康托尔证明了“Cantor定理”：

一个集合与它的幂集间不可能建立一一对应，幂集的势大于原集合的势。

所谓幂集是集合的全部子集为元素构成的集合。康托尔还证明了如果一个集合的势是 a，则其幂集的势为 2^a，$2^a > a$，说明无穷有无穷多层次，没有最大的无穷。

1877年，康托尔证明一条直线上的点与平面上的点(乃至 n 维空间中的点)一一对应。

这种结论不但使大多数数学家惊愕不已，连康托尔自己也感

到纳闷，他给好朋友戴德金写信说："我看到了这个事实，但连我自己也不敢相信它。"当然，他还是相信自己严格证明出的东西是真的，他雄辩地证明无穷集合不再遵守有穷集合的很多规则，例如两个无穷集合是否对等，必须坚持用一一对应的原则来讲理，而不许诉诸直观或经验。

1899 年，他已经预感到他的集合论可能引出逻辑混乱，在给戴德金的信中，康托尔有言在先："不能谈论由所有的集合组成的集合。"

康托尔的证题技巧令人叫绝，例如他证明，开区间(0,1)中的点与单位正方形内的点一一对应时，采用了下面的鬼斧神工：

设(x,y)是单位正方形内的点，z 是(0,1)内的点，把 x,y,z 都表成无尽小数(有限小数则写成 9 的无限循环)。把 x 与 y 的小数分成一组一组的，每组皆止于第一个非零数字，与(x,y)对应的点 z 选为如下写出的小数:0. 第一组 第二组 第三组……，其中奇数组依次抄自 x 的各组数字，偶数组依次抄自 y 的各组数字；这种操作是可逆的，于是建立了(0,1)内的点与单位正方形内的点的一一对应。例如

$$(x,y)=(0.\underline{3}\,\underline{02}\,\underline{4}\,\underline{005}\,\underline{6}\cdots,0.\underline{001}\,\underline{7}\,\underline{0}\,\underline{6}\,\underline{8}\,\underline{04}\cdots)$$

$$z=0.300102740600058604\cdots$$

(x,y)与 z 对应。

1878 年，康托尔提出连续统假设(代号 CH，continuum hypothesis)：

在自然数集的势与实数集的势之间不存在其他的势。

这个假设(CH)是否成立，至今无人证明或反驳。1900 年，希尔伯特在巴黎第二次国际数学家大会上提出 23 个未解决的数学难题，其中第一个问题便是"求证连续统假设"。这是数学中又一只"会下金蛋的鹅"，引起世界数学家的关注，1940 年哥德尔(Gödel)和 1963 年 P.J.科恩(Cohen)部分地回答了这一问题，估计离彻底解决 CH 的时日尚远。

1883 年，康托尔提出良序集和序数的概念。

康托尔提出：一个集合，它的元素按确定的顺序排列，依此顺序，存在该集合的第一个元素，而且对每个元素，都存在一个确定的后继，这样的集合称为良序集。例如自然数集合

$$1,2,\cdots,n,n+1,\cdots \tag{5.1}$$

为一个良序集，1 是其第一个元素；$n+1$ 是 n 的后继。

康托尔用 ω 表示自然数这个良序集的自然顺序；而把 ω 写在紧跟自然数序列之后，且称 ω 也是一个"数"，或称 ω 为第一个"超穷序数"，它比所有自然数都大，是自然数序列永远达不到的极限。

康托尔发展了这种超穷数的理论，由于他的理论不同于以往数学家们在变量意义下使用的无穷概念，犹如无理数和虚数的引入引起的数学风波，康托尔的超穷序数即实无穷理论也引起当时数学界的不安和抗议，一些数学家甚至拒绝接受无穷集合及其应用。为此康托尔的业师克罗内克(Leopold Kronecker)和康托尔翻了脸，克罗内克怒斥康托尔是骗子。法国大数学家庞加莱 1908 年公开说无穷集合是病态与邪气的坟墓，下一代人将视集合论为一种疾病。康托尔意识到他正在与他的前辈们彻底决裂，1883 年，他说："我使自己同普遍的关于数学中无穷的观点和经常被保护的关于数的本质观点处于敌对位置。"当然也有大师级人物站在康托尔这一边，例如希尔伯特说："康托尔的工作对我来说是最值得钦佩的数学理智之花，也是纯粹理性范畴之中人类活动所取得的最高成就之一。"1910 年，罗素则说："康托尔破译了先前围绕着数学无限的诸多难题，这可能是我们这个时代值得夸耀的最伟大的工作。"

1914 年，德国数学家豪斯道夫(Hausdorff Felix, 1868—1942)对集合论敏感地指出："在这个领域中什么都不是自明的，而且似乎越是有理的东西，往往越是错误的。"

康托尔关于超穷数理论发表了许多文章。1874 年，29 岁的康托尔在《克雷尔数学杂志》上发表第一篇这类性质的论文《关于一切代数实数的一个性质》；1879 年—1884 年，康托尔又相继发表了 6 篇研究无穷集合的系列论文，汇集成《关于无穷线性点集》一文。

康托尔最著名的著作是1895年—1897年出版的《超穷数理论基础》(两卷集)。

康托尔指出,数学理论必须肯定实无穷,因为很多最基本的数学概念,例如一切正整数,圆周上的一切点等,事实上都是实无穷性的概念。而且不能把有穷所具有的性质强加于无穷。他的“一一对应”的原理突破了传统的“整体大于部分”的旧观念,例如全体正整数与(其部分)全体正偶数一一对应,正整数集与正偶数集等势,相当于传统上的“个数相等”。

集合论的创始人康托尔的伟大业绩连同他的名字,将永远镌刻在人类科学的纪念碑上。

康托尔的集合论现在称为朴素集合论,1871年他对集合给了一个朴素的限制宽松的定义:“把一定的并且彼此可以明确识别的事物——这种事物可以是直观的对象,也可以是思维的对象——放在一起,称为一个集合,这些事物的每一个称为该集合的一个元素。”

在之后的工作中,其实康托尔已经察觉到这种朴素集合论在逻辑上要出事儿,他向戴德金谈过禁谈一切集合组成的集合。可惜他本人没有来得及建立一套公理系统给出集合论以明确无瑕的概念与理论。

1902年,罗素把理发师悖论改造成了一个所谓“罗素悖论”,引发了第三次数学危机。

理发师悖论说:“一位乡村理发师,宣称他不给村子里任何自己刮脸的人刮脸,但给所有不自己刮脸的人刮脸。”人们问:“理发师先生,您自己刮脸吗?”如果理发师回答自己刮脸,那么违背了他宣称的约定的前半部分;如果理发师回答不自己刮脸,那么按他约定的后半部分,他必须给自己刮脸。理发师陷入矛盾之中而不能自圆其说。

下面是罗素制造的“仿理发师悖论”。

事实上,有的集合,例如26个英语字母的集合

$$\mathscr{A} = \{a, b, c, \cdots, x, y, z\}$$

显然有 $\mathscr{A} \notin \mathscr{A}$。

但有的集合,例如"集合 $\mathscr{B}$是以 10 个以上元素的集合为元素组成的集合。"则$\{1,2,3,\cdots,10,11\}$,$\{1,2,3,\cdots,11,12\}$,$\cdots\{1,2,\cdots,10,\cdots,n,n+1\}\cdots$皆有 10 个以上的元素,这些集合皆 $\mathscr{B}$的元素,可见 $\mathscr{B}$的元素个数也超过 10 个,故应写 $\mathscr{B}\in\mathscr{B}$。

可见在康托尔意义下的集合,会发生集合不是自己的元素,又会发生集合是自己元素的现象。

罗素构作了如下的集合

$$B=\{A \mid A \notin A\} \tag{5.2}$$

其中 A 与 B 是集合的代号。罗素问道:"$B\in B$ 吗?"

怎么回答呢?!

若 $B\in B$,按 B 的定义(5.2),$B\notin B$,矛盾;

若 $B\notin B$,按 B 的定义(5.2),$B\in B$,矛盾。

其中矛盾回避不了!

德国数学家,逻辑代数的创始人弗雷格(Frege Friedrich Ludwig Gottlos,1848—1925)抱怨说:"当大厦即将竣工之时,基础却崩溃了!"

1908 年,罗素指出:"我们不能任意地制造一个集合。"理发师悖论的解决的根本办法是宣布世界上不会有这种理发师,或者把理发师排除在"他给刮脸和他不给刮脸的人群"之外,排除罗素悖论的根本途径是不承认 $B=\{A \mid A\notin A\}$是一个集合,禁谈一个集合是自己的元素,即不许谈 $B\in B$。

1908 年,法国数学家策墨罗(Zermelo Ernst Friedrich Ferdinand)和弗伦克尔(Fraenkel)合作提出一套 ZF 公理,按策墨罗讲,他们的 ZF 公理系统的目标是:"从现有的集合论成果出发,建立这一数学分支的原则,这些原则必须足够狭窄,以保证排除一切矛盾;另一方面,又必须充分广阔,使得康托尔集合论中一切有价值的东西得以保留。"

在 ZF 公理出现以前,人们可以自由地构作集合$\{x \mid \varphi(x)\}$,其中 $\varphi(x)$是对该集合中的元素性质的一种描述,正是这样限制不

够严格地随意制作集合导致了罗素悖论。ZF 公理则限制说：必须先有一个集合 A，在 A 中选择满足性质 $\varphi(x)$ 的元素 x 们来构作另一集合（A 的子集），包含一切集的集合不存在。于是从集合论中剔除了罗素悖论，解除了第三次数学危机。

在公理集合论中，到目前为止，还没有人发现任何悖论或矛盾，策墨罗宣称没有任何人会从中再制造出矛盾来。庞加莱则反唇相讥道："为了防备狼，羊群已用篱笆圈起来了，但却不知道圈里有没有狼。"

1925 年，希尔伯特说："我们曾经历过两次危机，头一次是微积分悖论，第二次是集合论悖论，我们不会再经历第三次，而且永远不会。"希尔伯特的自信并未经证明，他显然是过分乐观了一些。1930 年，数学家贝尔（Eric T. Bell）说："经验告诉大多数数学家，那些对上一代数学家来讲是稳固的、令人满意的东西意味着是下一代用更可靠的探究方法破旧立新、拨乱反正的好机会。所谓建立在数学基础上的合理共识，在任何意义上似乎都是不存在的。"后来数学发展的事实证实贝尔的话是对的。第三次数学危机之后，数学当中又发生了更为惊心动魄的矛盾。

2　图与 NPC 理论

图论是离散数学的重要分支，它创生于 1736 年，欧拉是图论之父。

欧洲的普瑞格尔河流过古城哥尼斯堡市，河中有岛两座，筑 7 座桥，如图 5.1(a)所示，节日里市民们老幼携扶上岛游玩，不知何日何人提出如下问题：每桥恰过一次，再走回出发点，可能吗？此即数学史上有名的"哥尼斯堡七桥问题。"

1736 年，欧拉把两岛两岸抽象成 4 个顶点，每桥是连接某两顶点的一条曲线，于是七桥问题被欧拉化成探讨在图 5.1(b)上是否可以画一条回路，使得此路上含每一曲线段恰一次。欧拉说顶点的位置画在何处，以及每条曲线段的曲直长短可以随意，此即是

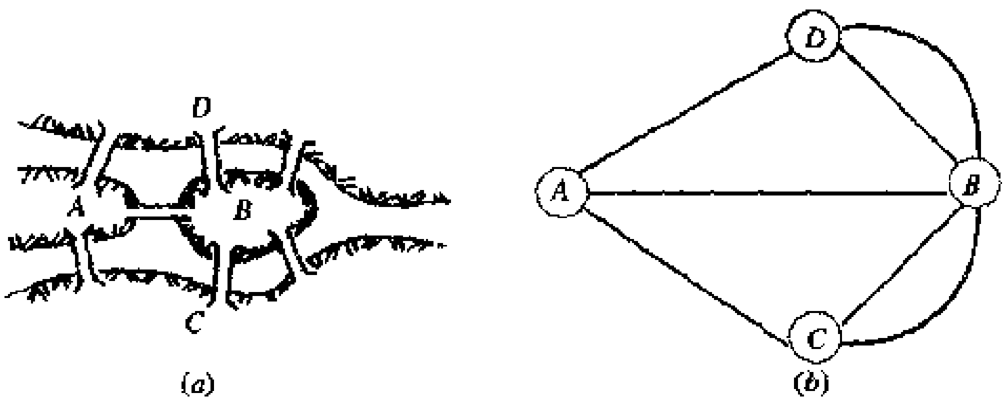


图 5.1

一维拓扑学的原始思想。人们后来把图论视为一维拓扑，可见拓扑学的创始人是欧拉。

欧拉于 1736 年把研究七桥问题的成果写成论文发表标志图论学科的诞生。在欧拉的论文中，把平面上任意画定的若干个点 v_1、v_2，…，v_n 称为顶点，其中一些顶对用曲线（或直线）连接来称为边，如此形成的图形叫做一个"图"（Graph），欧拉得出公式

$$\sum_{v \in v(G)} d(v) = 2\varepsilon$$

其中 $V(G)$是图 G 的顶集合，ε 是图 G 的边数，$d(v)$是与顶 v 关联（即以 v 为端点）的边数，称为顶的次数或度数。

欧拉得到下面一条定理：

顶数不少于 3 的连通图中有含一切边恰一次的回路的充要条件是每顶的次数皆非零偶数。

后来人们称这种能一次性遍历所有边的回路为欧拉回路，有欧拉回路的图称为欧拉图。

在七桥问题中，顶的次数是 3 和 5，所以欧拉宣布七桥问题无解。

1921 年，数学家 Fleury 给出求欧拉回路的有效算法（本章涉及的具体数学证明及算法细节可参考王树禾著《离散数学引论》，中国科技大学出版社，2001 年）。

对于欧拉图，一个尚未解决的问题是：

欧拉图是否可表成不超过顶数减 2 个圈的并？

1962年，中国数学家管梅谷提出“中国邮路问题”(Chinese postman problem)：

一位邮递员从邮局选好邮件去投递，然后返回邮局，他必须经过他负责投递的每条街道至少一次，为他设计投递路线，使其耗时最少。

上述中国邮路问题的数学模型是在边加了权的连通图上求一条含一切边的回路，使此回路是回路当中权最小者。

对于欧拉图，此所求回路就是一条欧拉回路，已有 Fleury 算法可解；对于非欧拉图，1973 年，Edmonds 和 Johnson 给出了解中国邮路的有效算法。

1995 年，王树禾提出多邮递员中国邮路问题及其近似解法，证明了这一问题是 NPC 难题之一：

邮局有 $k(k\geqslant 2)$位投递员，同时投递信件，全城街道都要投递，完成任务返回邮局，如何分配投递路线，使得完成全城投递任务最早？此问题记成 kPCPP(k Postmens Chinese Postman Problem)。

kPCPP 的数学模型如下：

G 是连通图，$\forall e\in E(G)$，$\exists\, w(e)\in \mathbb{N}$，$v_0\in V(G)$，求 G 中回路 $C_1, C_2, \cdots, C_k$，使得

(1) $v_0\in V(C_i)$，$i=1,2,\cdots,k$。

(2) $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\sum\limits_{e\in E(C_i)} w(e) = \min$。

(3) $\bigcup\limits_{i=1}^{k} E(C_i) = E(G)$。

其中 $E(G)$表示图 G 的边集合。

1847 年，德国物理学家柯希霍夫(Kirchhoff)提出树的概念。所谓树即无圈连通图，他是在研究电路网络时考虑了电路网的所谓“生成树”，即一个含有电路图上所有节点的树形子图。

1857 年，英国数学家凯莱(Caylay Arthur, 1821—1895)研究 n 个碳原于的饱和碳氢化合物 C_nH_{2n+2}的同分异构体时，提出了树的概念与计数的理论，它用图论的观点证明了仅当 $m=2n+2$ 时，碳氢化合物 C_nH_m 才可能存在。

1889 年,凯莱给出 n 顶完全图(即每项之间皆有边的图)K_n 的生成树的个数公式

$$\tau(K_n) = n^{n-2}$$

例如 10 个顶的完全图,竟有一亿棵生成树,每页纸画 10 棵,需要一千万页纸才能画完 K_{10}的生成树。

1956 年,Kruskal 设计了求最优树的有效算法,他面对的问题的实际模型是:

欲修筑连接若干城镇的铁路,已知 i 城与 j 城路段造价为 c_{ij},设计一个线路图,使总造价最低。

上述问题的数学模型是在已知连通加权图上求总权最小的一棵生成树,此树称为最优树。

平面图在图论中占有突出的地位。

能画在平面上使得无任二边在边的内点相交的图为平面图,例如多面体的顶与棱组成的图就是平面图。

欧拉于 1736 年得到了关于连通平面图的著名公式

$$\nu - \varepsilon + \phi = 2 \tag{5.3}$$

其中 ν 是顶数,ε 是棱数(边数),ϕ 是面数。

事实上,$\varphi = 1$ 时,图 G 是树,这时 $\varepsilon = \nu - 1$,公式(5.3)成立,假设对于 $\varphi \leqslant n(n \geqslant 1)$公式(5.3)已成立,对于 $\varphi = n + 1, n + 1 \geqslant 2$,则 G 中有圈,设 $e \in E(G)$,且 e 在圈 C 上,则 $G - e$ 仍连通,被 e 分隔的两个面在 $G - e$ 中变成一个面,且 $G - e$ 仍为平面连通图,由归纳法假设

$$\nu(G - e) - \varepsilon(G -) + \phi(G - e) = 2$$

$$\nu(G) - [\varepsilon(G) - 1] + [\phi(G) - 1] = 2$$

即

$$\nu(G) - \varepsilon(G) + \phi(G) = 2$$

可见公式(5.3)成立。

欧拉公式(5.3)是数学中最精彩最有用的公式之一。应用它欧拉证明正多面体只有 5 种:

面数	4	6	8	12	20
面形	正三角形	正方形	正三角形	正五边形	正三角形
顶数	4	8	6	20	12
棱数	6	12	12	30	30
每顶处棱数	3	3	4	3	5

而且还证明出除无 7 棱多面体外，对一切不小于 6 的自然数 n，存在 n 棱多面体。

平面图的高峰定理是 1930 年由波兰数学家库拉托夫斯基建立的。

当时欧洲大陆流传下面的五王子修路问题：

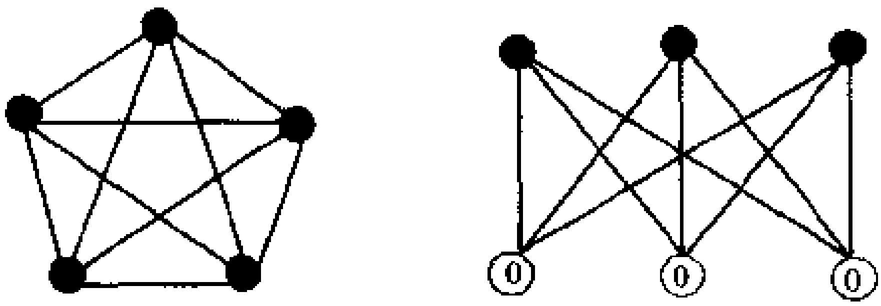
一位独裁者生有五子，死到临头时他对 5 个儿子留下遗嘱，把土地瓜分给 5 个儿子；这 5 个儿子在自己的领地上分别修筑宫殿，他们还要求每两座宫殿间修一道路，且每两条道路皆不交叉，愚蠢的王子煞费心机，始终无法实现筑路要求。

1930 年，库拉托夫斯基给出平面图的充分必要条件，严格证明“五王子修路问题”无解。

库拉托夫斯基的定理为：

G 是平面图的充要条件是 G 中无与 K_5 或 $K_{3,3}$同胚的子图。

所谓两图同胚是指一个图是由另一图在某些边内点处“加上”一些新顶得到的。K_5 与 $K_{3,3}$如图 5.2(a)和图 5.2(b)所示。



(a)　　(b)

图 5.2

把一个平面图(例如一个多面体)画在平面上,使无两边相交叉,这一过程称为平面嵌入。为了把一个平面图进行平面嵌入,应从"纵深搜索法"(Depth first search)谈起,此方法代号为 DFS。

DFS 是图论中最重要的基础算法之一。

1690 年,独裁者威廉王修筑了一座迷宫,其遗址至今仍保留在奥地利,见图 5.3(示意图)。

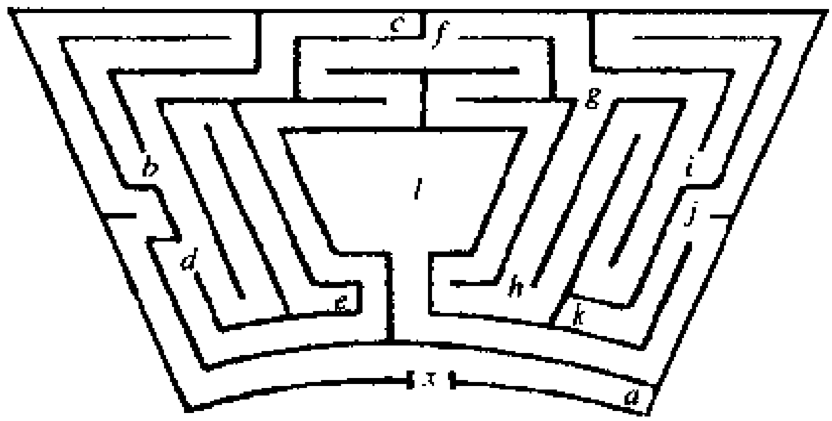


图 5.3

威廉把他的宫殿修成这般怪样,是为了行刺者不易搜索到他,而且也易于迷路,不能从容退出。欧洲还有关于"妖精宫"的传说,是讲克里特岛上住一个食人人面妖米诺托,她住在一座状似威廉迷宫的山洞中,雅典王子忒修斯在公主亚丽阿特的帮助下,以绒线做路标,顺利地搜索到妖精,斩妖后及时迅捷逃离现场。

1973 年,数学家 Hopcroft 和 Tarjan 受如何出入迷宫的启发,设计了一个有效算法,对一个未知结构的图,从一顶出发,每顶每边皆经过,再由出发点退出,且每边恰行两次,此算法就是 DFS 算法。图 5.4 是执行 DFS 的一个简单实例,s,v_1,v_2,v_3 是未知结构的一个图 G 的顶,s 是出入口,实线是 G 的边,箭头指示搜索方向,虚线是撤退路线。

这个算法的指导思路是能前进时就继续前进,不能前行时则沿来路倒退,所谓"能前进"指还有未标志的新路可寻。

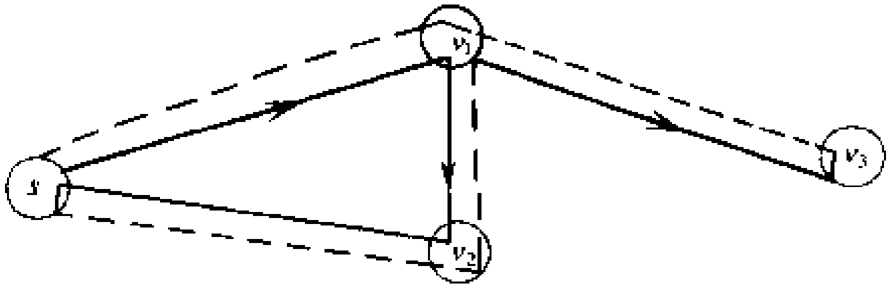


图 5.4

1966 年,数学家 Lempel,Even 和 Cederbaum 运用 DFS 等方法给出把一个平面图进行平面嵌入的有效算法,称为“顶点添加平面嵌入算法”。

平面图当中一个最重大的问题是所谓“4 色猜想”,代号 4CC。

1852 年,伦敦一个名叫 F.格思里的大学生写信给他的哥哥弗雷德里克,格思里在信中向哥哥说:“每张地图上的国家总能用 4 种颜色着色,使邻国异色。”当时弗雷德里克兄弟二人在伦敦大学听当时著名数学家 A.德·摩根(1806—1871)的课,就拿这个地图着色问题去请教德·摩根;德·摩根经研究发现一个重要线索:地图上不会有 5 个区域彼此相邻。从而猜想不需要 5 种颜色,感到 4CC 是成立的。当然这一线索不能算做 4CC 为真的数学证明。

1878 年,著名数学家 A.凯利(1821—1895)不能决定 4CC 的真伪,就把它提交伦敦数学会,不到一年的时间,伦敦数学会会员 A.B.肯普(Kemple,1849—1922)发表了一篇论文,宣称 4CC 是真的。肯普的证法极巧妙,11 年后的 1890 年,P.J.希伍德(Heawood,1861—1955)挑出了肯普证明中的不可纠正的错误,且沿用肯普的技巧证明了五色定理:用不超过 5 种颜色可以染任何地图,使邻国异色。以后又对 4CC 研究了几十年时间,未获正果。这期间不少著名数学家(例如伯克豪夫(Birkhoff))和无数业余爱好者也在四色猜想上消耗了大量的精力。

这样一个很容易用普通(自然)语言对任何外行人讲清楚的问题,何以如此众多的数学家愿意在这个实用价值几乎为零的

问题上下如此巨大的工夫呢？到19世纪，数学已经发展得相当有力，甚至有的数学家（例如希尔伯特等）认为凡能用数学语言合理提出的问题，总能用足够有力的数学手段严格地加以解决，而且当时多数数学家还觉得给出的解答可以使有疑意的其他数学家在不太长的时间内来检验答案的正误。大家认为4CC就是这样的问题之一，如果不能解决它，那就是我们还需要创建适当的数学工具。

对于那些证明不太长而且理论性较强的定理，上述观点是可以理解的，但对于一些需要超长证明且计算量极大的定理，传统的手工证明就难以见效了，4CC就可能是这么一个问题。

1976年，美国数学家阿佩尔（Appel）和哈肯（Haken）在计算机上做出了4CC为真的机器证明，他们用了一百亿个逻辑判断，耗用了1200个机时。

关于哈密顿图的问题很多都是图论中的热点问题和难点问题，例如如何判定一个图是哈密顿图和解货郎问题就是图论乃至整个数学当中的最难解的问题之一。

1857年，英国数学家哈密顿（William Rowan Hamilton，1805—1865）发明了一种数学游戏，在正十二面体的20个顶点上分别标志上北京、东京、柏林、巴黎、纽约、旧金山、莫斯科、伦敦、罗马、里约热内卢、布拉格、新西伯利亚、墨尔本、耶路撒冷、爱丁堡、都柏林、布达佩斯、安亚伯、阿姆斯特丹和华沙这20个遍布全球的大都市，要求从某城出发，沿正十二面体的棱行进，每城恰过一次，再返回出发地。这个游戏是可以成功的，如图5.5。事实上正十二面体是平面图，图5.5是它的一个平面嵌入。当年哈密顿以25个金币的高价把此项专利卖给了一个玩具商。

哈密顿周游世界的游戏貌似1736年欧拉处理的七桥问题（也是一个游戏性问题），都是要求遍历性，不过要求欧拉的是一次性遍历图的所有边，而哈密顿提出的要求则是一次性遍历一个图的顶，欧拉面临的遍历问题已被他圆满而有效地解决了，但哈密顿的问题却成了数学史上遗留的最难问题之一。1857年哈密顿的这

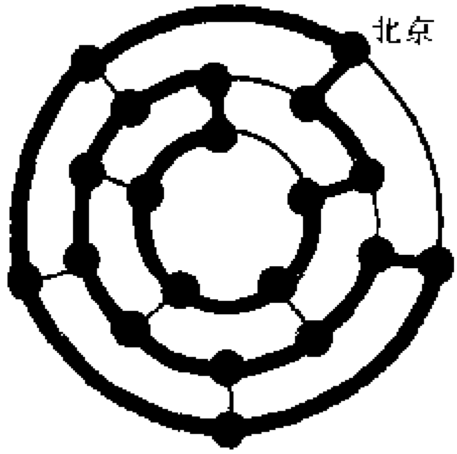


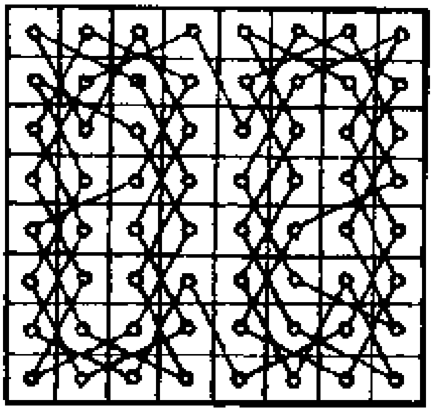
图 5.5

个貌似儿戏的游戏又演化出一个著名的所谓“货郎问题”(Traveling salesman problem):

一位货郎到各村去卖货,再返回出发地,要求每村至少要去一次,为货郎设计一种耗时最少的售货路线。

如果把村子全排列,需要从$\frac{1}{2}(n-1)!$种排列中选出一种路程最小者,由于 n 是一个给定的整数,从有限的几种方案中挑一种最佳方案,似乎求取有方,可惜$\frac{1}{2}(n-1)!$个方案个数过多,既使处理一种方案视为一次运算,在每秒百亿次的计算机上,对于例如 128 村子的情形也需要连续运算 10^{700}个世纪!可见这种愚公移山式的解决方式是应该否定的。必须对货郎问题设计出有效算法,至今对此仍无本质进展!

哈密顿讨论了一个图是否存在一个含一切顶点的圈的问题,这种圈他的学生们称为 Hamilton 圈,有哈密顿圈的图称为 Hamilton 图。至今有效判定一个图是否哈密顿图的算法尚未建立!只对一些特殊的图,能判定其是否 Hamilton 图,例如,对于国际象棋盘上的“马图”(以方格为顶,仅当马从甲格一步可跳到乙格时,甲乙两顶间连一边形成的图)是 Hamilton 图,即马可遍历,见图 5.6,图中画出了马的 Hamilton 圈,右边的数字方阵是一个每行每列之和皆 260 的幻方,其中每格的数字是马行的步数。



50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

图5.6

哈密顿是英国物理学家和数学家，在英国科学史上是仅次于牛顿的第二号人物。他的主要数学成就在微分方程（Hamilton 系统）和泛函分析方面，他的四元数 $a+bi+cj+dk$（a 是实部，$bi+cj+dk$ 是向量部分）类似于复数，称为超复数，进而建立了“超复数”理论，在近世代数领域他也有杰出贡献，四元数引起了数学的一场重大变革，犹如几何领域中非欧几何那样一种深刻的飞跃。

哈密顿 1805 年生于爱尔兰首都都柏林，父为商人，母乃名门之女，聪慧干练。幼年的哈密顿是超常儿童，3 岁能读英语书，5 岁学会了拉丁语、希腊语和希伯来语，8 岁学会法语和意大利语，10 岁时学会了印度、阿拉伯等多种东方语言，是一位罕见的语言奇才。

哈密顿 18 岁以第一名的成绩考入都柏林三一学院，此前，他没有上过小学和中学，小学中学的课程是在家里由叔叔辅导自学完成的，12 岁读完了欧几里得的《几何原本》拉丁文版和克莱罗的《代数基础》，13 岁到 16 岁，自学牛顿与拉普拉斯的著作，17 岁时掌握了微积分，且学会了计算日食与月食的数理天文学。

1827 年，哈密顿写出论文《光线系统理论》，三一学院教授布林戈里在给皇家科学院的推荐信中写道：“我不是说哈密顿将会成为数学家，而是说他现在就是第一流的青年数学家。”

哈密顿 22 岁时，大学尚未毕业，三一学院领导一致推选他为

布林戈里教授的继承人，荣获爱尔兰皇家天文学家的称号。1837年成为爱尔兰皇家科学院院长。

1843年，哈密顿在爱尔兰皇家科学院宣布“四元数”的发现，48岁时出版《四元数讲义》一书，1866年出版名著《四元数基础》。四元数在代数、微积分、电磁学等领域有重要应用。

1835年，哈密顿出版了《动力学的一般方法》，此书与上述四元数的著作是哈密顿的代表作，他的著述共140种。

分析力学中的“哈密顿原理”、微分方程中的“哈密顿系统与哈密顿函数”和纯数学中的“四元数”是数学力学乃至整个物理学中的金科玉律。

匹配技术是图论当中十分有趣且十分有用的内容，寇尼希(König)、霍耳(Hall)、贝尔热(Berge)、塔特(Tutte)、埃德蒙兹(Edmonds)、科恩(Kuhn)和曼克瑞斯(Munkras)对匹配的理论与算法做了出色的工作。

1931年，König给出匹配与覆盖的概念：如果 $M\subseteq E(G)$，$\forall e_i, e_j\in M$，e_i, e_j 不相邻，则称 M 是图 G 的一个匹配；M 中的边的端点称为在 M 中相配；M 中的边之端点称为被 M 许配，G 中每顶皆被 M 许配时，M 称为完备匹配；G 中已无匹配 M'，使得 $|M'|>|M|$，则称 M 为 G 的最大匹配。

$K\subset V(G)$，G 的每条边至少有一个端点在 K 中，则称 K 是 G 的一个覆盖，G 的最小覆盖的顶数称为覆盖数，记成 $\alpha(G)$。

1931年，König建立了下面的定理：

二分图中，若 M^* 是最大匹配，$\bar{K}$ 是最小覆盖，则 $|M^*|=|\bar{K}|=\alpha(G)$。

1936年König的名著《有限图与无限图理论——线复形的组合拓扑学》问世，“线复形”即图(Graph)。

1935年，霍耳建立了有名的“婚配定理”：

G 是二分图，顶集的二分图划分为 X 与 Y，G 中存在把 X 中的顶皆许配的匹配的充分必要条件是，对一切 $S\subseteq X$，$|N(S)|\geqslant|S|$，其中 $N(S)$ 是 S 的邻集，即与 S 中的顶相邻的顶组成的集合。

霍耳由其婚配定理推导出下面的著名结论：

k 次正则(即每顶皆 k 次)二分图($k>0$)有完备匹配。

根据霍耳婚配定理，解决了著名的伯努利—欧拉错放信笺问题：

某人给6位朋友各写了一封信，准备了6个写有收信人地址姓名的信封，问有多少种投放信笺的可能，使每封信的信笺与信封皆不符？

设信笺 x_i 与信封 $y_i(i=1,2,\cdots,6)$ 是相符的，于是问题化成图5.7中完备匹配的个数 $\varphi(6)=?$ 由于图5.7是5次正则二分图，所以有完备匹配。

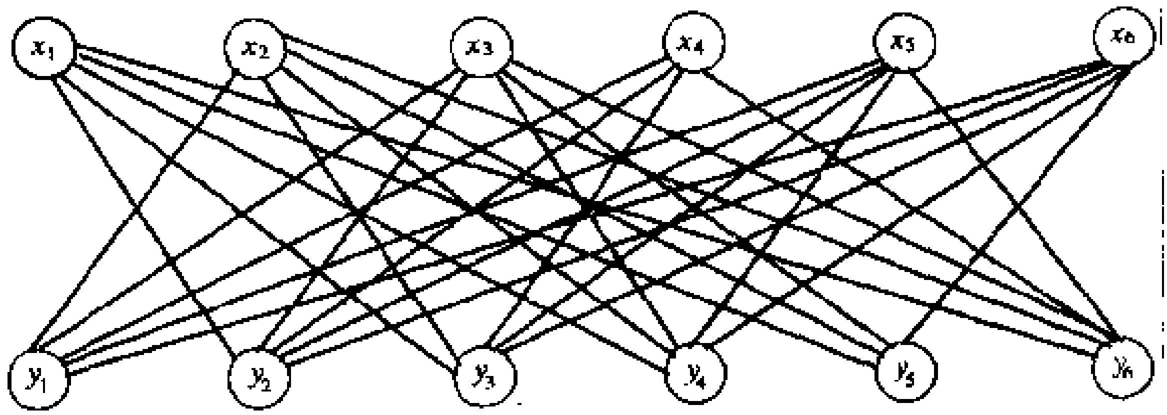


图 5.7

x_1 与 y_2 相配时，完备匹配的个数为 $G-x_1-y_2=G_{x_1y_2}$ 中($G_{x_1y_2}$ 是个4次正则二分图)完备匹配的个数 $\psi(5)$。在 $G_{x_1y_2}$ 中，若 x_2 与 y_1 相配，则 $\psi(5)=\varphi(4)$，若 x_2 不与 y_1 相配，则 $\psi(5)=\varphi(5)$；于是在 G 中 x_1 与 y_2 相配时，有 $\varphi(5)+\varphi(4)$ 个完备匹配；同理 x_1 与 y_j $(j=3,4,5,6)$ 相配时亦有 $\varphi(5)+\varphi(4)$ 个完备匹配，所以 $\varphi(6)=5[\varphi(5)+\varphi(4)]$，这是一个递推公式，可算出 $\varphi(6)=256$。

一般而言，对于 n 封信的情形

$\varphi(n)=(n-1)(\varphi(n-1)+\varphi(n-2)),\varphi(2)=1,\varphi(1)=0$

1947年，Tutte 对一般图 G 给出了存在完备匹配的充要条件，且得出结论：

无桥三次正则图有完备匹配。

1957 年，贝尔热建立了最大匹配的充分必要条件是 G 中无 M 可增广轨（即一条轨上的边交替地在 M 内与 M 外出现，且此轨的起止顶皆未被 M 许配）。

根据 Berge 的定理，1965 年，匈牙利数学家 Edmonds 建立了以他的祖国命名的著名的"匈牙利算法"，这是一个有效算法（或称好算法）。

匈牙利算法能解决诸如下面的实际问题：

某公司有职员 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，他们去做工作 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，每人适合做其中一项或几项工作，问怎样分配工作，使得尽可能多的人就业？

1957 年，Kuhn 和 Munkras 面对下列问题：

公司的职员们去做各项工作，效益不尽一致，需要制定一个分工方案，使人尽其才，公司的总效益最大。

这个问题的数学模型是：G 是完全加权二分图，G 的二分图顶划分为 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$，权 $w(x_iy_j) \geqslant 0$ 已知，求总权最大的所谓最佳匹配。

关于图的着色，是一个令人着迷的领域，这个领域未解决的问题既难又多，开始时是由 4CC 引发的，人们为了冲击 4CC，深思熟虑，做出了许多图论成果。

1912 年，数学家 Birkhoff 引入颜色多项式，他提出且解决的问题是：

今有 $k(k \geqslant 1)$ 种颜色，对给定的标志图 G 进行正常顶着色（邻顶异色），问具有多少种不同的着色方式？用 $P(G, k)$ 表示这些不同的着色方式的总数。

Birkhoff 证明 $P(G, k)$ 是 k 的 ν 次多项式（称为图 G 的颜色多项式），且其首项是 k^ν，第二项是 $-\varepsilon k^{\nu-1}$，常数项为零，系数皆整数，系数正负相间地出现。

Birkhoff 把 4CC 表成 P(平面图, 4) > 0。

Read 提出猜想：$P(G, k)$ 中的系数绝对值先是单调上升，继而单调下降。

至今无人反驳亦无人证明 Read 猜想。

拉姆赛数是图论与组合论当中最诱人的问题之一。1928 年英国数学家、哲学家和经济学家拉姆赛(Ramsey)在伦敦数学会宣读了一篇数学奇文,提出所谓拉姆赛数的计算问题,1930 年他因腹部手术不幸逝世,亡年仅仅 26 岁！但他的关于拉姆赛数的数学遗产却永泽数学界,数学家们公认,如果从离散数学中选一项最为精美的成就,那么我们将投拉姆赛理论的票。

1928 年拉姆赛提出的问题是:至少多少人的任一人群之中必有 p 个人彼此相识或 q 个人彼此不相识？把满足这种需求的人群的最少人数记成 $r(p,q)$,$r(p,q)$称为拉姆赛数。

如果相识者之间连接一条绿线,不相识者之间连结一条红线,则 $r(p,q)$表示:$\forall p,q\in N$,K_n 的边用红绿两种颜色任意着色,问 n 最少是多少,才能出现一个绿色完全子图 K_p 或一个红色完全子图 K_q？

$r(3,3)=6$ 很容易证明:设 $v_1,v_2,\cdots,v_6$ 是任取的 6 人,与 v_1 相连的红线与绿线中必有 3 条同色,不妨设同为红色,且这三红线的另一端分别为 v_2,v_3,v_4,若$\triangle v_2v_3v_4$ 是绿色的,则 $r(3,3)\leqslant 6$;若$\triangle v_2v_3v_4$ 中有一条红边,则出现红色三角形,这时亦有 $r(3,3)\leqslant 6$,总之 $r(3,3)\leqslant 6$;而若是 5 人的人群,可能出现图 5.8 显示的关系,不发生同色三角形,可见 $r(3,3)>5$,从而 $r(3,3)=6$。但对于 p 与 q两者皆不小于3的其他拉姆赛数的求得却不再如$r(3,3)=6$这

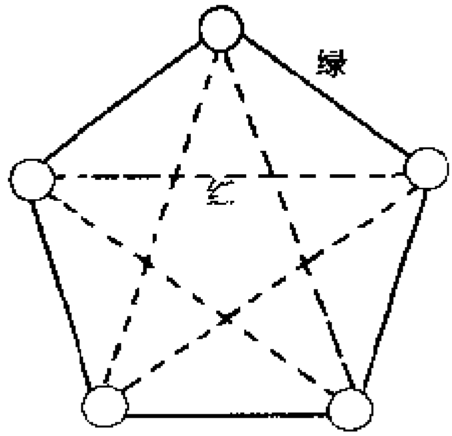


图 5.8

么简单,从1928年到2002年经过几代数学家和计算机专家的努力,已经确定的非平凡的拉姆赛数一共有9个:

$r(3,3)=6,\quad r(3,6)=18,\quad r(3,9)=36,$

$r(3,4)=9,\quad r(3,7)=23,\quad r(4,4)=18,$

$r(3,5)=14,\quad r(3,8)=28,\quad r(4,5)=25$。

特别是 $r(4,5)$,是1993年美国罗彻斯特理工学院的 S.P.Radziszowski 和澳大利亚国立大学的 B.D.Mckay 用计算机求得的,他们的工作量相当于一台标准电脑工作了11年。此数 $r(4,5)=25$ 求得之后,著名的匈牙利数学家厄尔多斯(Erdös)说:"假若某年某月某日,一伙外星强盗入侵地球,威胁道,若不能在一年内求得 $r(5,5)$,他们便灭绝人类! 面对如此生死关头,人类应该召集全球所有的数学家和计算机专家,夜以继日地计算 $r(5,5)$,以求免于灭顶之灾;如果外星人威胁说要求得 $r(6,6)$,那我们可就别无选择,只能同仇敌忾,对这批入侵者进行先发制人的打击。"

拉姆赛理论含有一种极为深刻的哲理,体现的思想不仅属于数学,甚至不仅仅属于自然科学。我们用两种颜色胡乱地对 K_n 的每条边进行着色,在上色的过程中,究竟哪条边上什么颜色,完全是随意的(无规的),结果呢? 只要 n 不小于 $r(k,k)$,则必然出现同色的 K_k 子图。我们上色时,绝无蓄意去为染威同色 K_k 而努力,无规活动却产生了有规的后果,无序的行为也有某种规律性! 拉姆赛本人既是杰出的数学家,又是睿智深邃的哲学家,只可惜英年早逝,不然,他会再告诉我们更多的富于哲理的数学奥秘。

图论的发展史当中一个从应用的观点和基础理论的观点看都处于核心位置的内容是网络流的理论与算法,它是动态图论的发详地。

1956年,福德(Ford)和福尔克逊(Fulkerson)对于网络最大流的求取给出了有效的算法(下称2F算法);且建立了"最大流最小截定理"(下称"双最定理")。

Ford 和 Fulkerson 当时面临的实际问题是:

把商品从产地运往市场,在交通网上每个路段运输能力给定

的条件下，设计一个方案，使得单位时间运抵目的地的商品量最大。

这个问题的图论模型是：

G 是有向（每边有一个方向）加权图，s 与 t 是两个指定的顶点，分别称为源与汇，边 e 上的权 $c(e)$ 称为边 e 的容量，称 G 为一个网络。若映射

$$f: E(G) \to \mathbb{R}$$

满足

$$(C_1) \quad \forall e \in E(G), 0 \leqslant f(e) \leqslant c(e)$$

$$(C_2) \forall v \in V(G) - \{s, t\}$$

$$\sum_{e \in \alpha(v)} f(e) - \sum_{e \in \beta(v)} f(e) = 0$$

其中 $\alpha(v)$ 是以 v 为头的边子集，$\beta(v)$ 是以 v 为尾的边子集。则称 $f(e)$ 是流函数，且称

$$F = \sum_{e \in \alpha(t)} f(e) - \sum_{e \in \beta(t)} f(e)$$

为 f 的流量。目标是确定 $f(e)$，使得 $F = \max$。

$S \subset V(G), s \in S \neq \emptyset, t \in V(G) - S = \bar{S} \neq \emptyset$，称

$$C(S) = \sum_{e \in (\bar{S}, S)} c(e)$$

是截 $(S, \bar{S})$ 的截量，$(S, \bar{S})$ 表示尾在 S 头在 $\bar{S}$ 的边子集。

1956 年 Ford 与 Fulkerson 对上述问题给出了有效算法（下称 2F 算法），且给出了图论中的一个核心定理：

双最定理 2F 算法得到的流函数是最大流；最大流的流量等于最小截的截量。

1970 年，Dinic 改进了 2F 算法，建立了求最大流的 Dinic 算法。

1975 年，Hopcroft 和 Karp 用最大流算法给出求二分图上最大匹配的有效算法。

1979 年，以色列著名图论专家 Even 利用图的最大流技术解决了运筹学中的两个 PERT 的重要问题。

PERT 是 Program evaluation and review technique 的缩写，即规划

审核技术。

PERT 图是指下面的有向图 $G(V,E)$：

① $V(G)$中存在起止顶 s 与 t。

② G 中无有向回路。

③ $\forall v \in V(G)-\{s,t\}$，$v$ 在从 s 到 t 的有向轨上。

Even 约定：

① PERT 图上每边代表一个过程。

② $\beta(s)$中的边代表的过程可以马上运作。

③ $v \in V(G)$，$v \neq s$，当 $\alpha(v)$中的过程全结束时，$\beta(v)$中的过程才可开始。

Even 解决的问题是：

(1) 关键轨道问题，代号 CPM(Critical path method)。设 PERT 图每边之权为 $l(e)$，$l(e)$表示过程 e 所需时间，问由 $\beta(s)$中过程开始之时到 $\alpha(t)$中过程全部完成，最短需要多长时间？

Even 给出的算法是线性算法，时间复杂度仅 $O(|E|)$。欲缩短工期，必须把每条关键轨道上至少一条边的长度缩短。

(2) PERT 图中每一过程由一台机器或人来完成，问至少准备几台机器，才能使得对任意给定的 $l(e)$，每一过程不至于因为机器不足而延误？

Even 指出边容量下界为 1，上界不限的从 t 到 s 的最大流即为所求，显示了网络流技术的绝妙应用。

1927 年，Menger 建立了一组有关图的连通度的概念与定理，1956 年，G. B. Dantzig 和 Fulkerson 用网络技术给出了求图的连通度的有效算法。

所谓顶连通度，记成 $\kappa(G)$，表示从一个连通图 G 上最少删除几个顶，可使 G 不再连通；相似地，可以定义边连通度 $\kappa'(G)$($\kappa(K_n)=n-1=\kappa'(K_n)$)。

1962 年，美国数学家哈拉里(Harary)研究了下面的所谓“可靠通讯网络”问题：

在 K_n 上求取一个 n 顶 m 连通($m<n$)子图 G，(即 $\kappa(G)\geq$

m,$|V(G)|=n$),使其边数$|E(G)|$最小。

边数最少是为了造价低;要求连通度$\kappa(G)$不小于m是为了保障一些(少于m个)顶(台站)被破坏后,全网仍能通话。

图论中有许多未解决的难题。

1929年,Ulam提出如下猜想:

G_1,G_2是两个图,且$G_1-u_i\cong G_2-v_2$,$i=1,2,\cdots,n$,$V(G_1)=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$,$V(G_2)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,则$G_1\cong G_2$。

至今仍无人攻克Ulam猜想。

1950年,德国数学家卡拉兹(Callatz)在马萨诸塞州召开的国际数学家大会上提出了一个"$3x+1$问题":任取一组自然数$x_1,x_2,\cdots,x_n$,作为一个有向图的一些顶,从这组顶出发,如下构作一个有向图G:若x是G的顶,当x是偶数时,则取$\frac{x}{2}$也是G的顶,且从x到$\frac{x}{2}$之间安一条有向边,若x是奇数,则取$\frac{3x+1}{2}$也是G的一个顶,且从x到$\frac{3x+1}{2}$之间安一条有向边,则一定得到一个有限有向图,且1是此图的一个顶,每个顶到1存在一条有向轨。

这个问题在数学史上曾吸引了许多数学家和大学生,企图证明此猜想为真。东京大学的Nabwo Yoneda用计算机检验了1.2×10^{12}个自然数,都有猜想的结果。

1970年,H.S.Coxefer设奖金50美元求解Callatz猜想,无人响应;接着Paul Erdös设奖金500美元求解Callatz猜想,仍无人有资格得此奖金;最近B.Thwaifes设奖金1000英镑,仍无人能兑奖。关于上述"$3x+1$问题"的研究论文已发表几十篇,可惜无一篇给出"$3x+1$问题"的真伪性证明。

Erdös说:"数学尚未发展到能解Callatz猜想的水平!"

Callatz猜想的困难在于它形成的图的结构特点并不确定,或者说从最初一批顶$x_1,x_2,\cdots,x_n$出发的轨的长短与走向(下一个顶是增大还是减小,升降无规)带有随机性。

下面讲计算复杂度理论的发展要点。

1936年,英国数学家图灵(Turing,1912—1954)对计算的概念进行了令人折服的机械化论证,回答了“什么是计算”这个听似简单,实则非常深刻的问题。他引入所谓“Turing机”的概念,准确严格地刻划了人的脑与手在进行计算时的实际动作,给出Turing机的数学定义。

Turing机只是一个数学专用名词,并非什么机器,但它的理论作用十分之大,是研究计算复杂度不可缺少的工具,而且为1946年真计算机的出现奠定了思想基础。

图灵称下面的八重组为一部图灵机:

$$(S,\Gamma,\Sigma,f,b,s_o,s_y,s_N),$$

其中

$$S=\{s_1,s_2,\cdots,s_n,s_o,s_y,s_N\}$$

是状态集合,s_o 是初态,s_y 是Yes态,s_N 是No态。

$$\Gamma=\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k,b\}$$

是带符集合,b 是空白符。

$\Sigma\subset\Gamma$,Σ 是输入符集合,$b\in\Gamma-\Sigma$。

$$f:(S-\{s_y,s_N\})\times\Gamma\rightarrow S\times\Gamma\times\{-1,1\}$$

称为转换函数。

Turing机上有一个无限长“纸带”,划分成

$$\cdots,C(-2),C(-1),C(0),C(1),C(2),\cdots$$

等地址序列。

Turing机有一个读写头。

Turing机的计算过程是:

(1) 头位函数 $h(t)$ 的值。读写头每个单位时间瞄准一个地址,若 t 时刻瞄准 $C(i)$,则写成

$$h(t)=i$$

且规定 $h(0)=1$,即开始时读写头在 $C(1)$ 地址上。

(2) 数据输入动作。设输入符集 $\Sigma=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,记时刻

t, $C(i)$处写的带符是 $\gamma(i,t)$,且规定

$$\gamma(i,0)=x_i, i=1,2,\cdots,n$$

$$\gamma(i,0)=b, i\notin\{1,2,\cdots,n\}$$

(3) 转换函数的作用。设时刻 t 的状态为 $s(t)\in S-\{s_Y, s_N\}$,则

$$f(s(t),\gamma(h(t),t))=(p,q,\mathrm{d})$$

其中

$$(s(t),r(h(t),t))\in(S-\{s_y,s_N\})\times\Gamma$$

$$(p,q,\mathrm{d})\in S\times\Gamma\times\{-1,1\}$$

$$s(t+1)=p$$

$$h(t+1)=h(t)+\mathrm{d}$$

$$\gamma(i,t+1)=\begin{cases}q, i=h(t)\\ \gamma(i,t), i\neq h(t)\end{cases}$$

(4) 停机

$$s(t)\in\{s_Y,s_N\}$$

时停机,计算完成。

图灵指出,对于"判定问题"(即答案不是"是"就是"否"的问题)D 的任意给定的一个实例,这个实例用字符 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 表达时,实例答案是"是"当且仅当以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为输入时,Turing 机停机于 s_Y 态,这时则承认 Turing 机解决了这个判定问题 D。

1965 年,Edmonds 提出"有效算法"的观念。他所指的算法是一组有穷规则,明确规定何时应做何种操作;而有效算法则是指对给定的问题 D 存在一个多项式$P(t)$,使得对 D 的每个实例,当输入长为 n 时,Turing 机在 $P(n)$时间内可以解决。

Edmonds 把可用有效算法解决的问题称为 P 类问题。

1972 年,加拿大的数学家库克(Cook)和卡普(Karp)定义了 NP 类问题和 NPC 类问题。

他们指出,有些难问题,例如"图 G 是否 Hamilton 图?"现在尚不知它是否属于 P 类,但给出一些附加信息,例如对 G 的子图 G_1,

图 G_1 是否 G 的 Hamilton 圈，则可以在多项式时间内得出结论。这种附加信息称为“猜测”。一个判定问题 D 在所谓“不确定图灵机”上在多项式时间内得以解决，是指对于 D，存在一个多项式 $P(n)$，使得对 D 的输入长为 n 的实例。若其答案是“是”，则存在一个“猜测”，对于这个猜测，图灵机在 $P(n)$ 时间内停机于 s_y 态；若其答案是“否”，则对每个猜测，在 $P(n)$ 时间内，图灵机停机于 s_N 态。

Cook 和 Karp 指的不确定图灵机中“不确定”3 个字的含义是由于对猜测的“穷举”，如上来解决问题所用的时间一般将会是指数式的增长(随 n 的增加)，实际是在合理的时间内得不到确定答案的。Cook 和 Karp 在 1972 年定义在多项式时间内在“不确定图灵机”上可解决的问题叫做 NP 类问题，NP 类问题的集合记成 NP。

显然 $P \subseteq NP$，离散数学当中一个尚未解决的十分之重要的问题是

$$P = NP \text{ 吗?}$$

为了进一步研究这个问题，1972 年，Karp 又定义了一个 NP 的子集：

$$NPC = \{D \mid D \in NP, \forall D' \in NP \text{ 时}, D' \propto D\}$$

其中“$\propto$”号的含义是：若 D_1 与 D_2 是两个判定问题，存在映射 f 及多项式 $Q(n)$，使得对任给的 D_1 的一个实例的输入 I_1，I_1 之长为 n，则在 $Q(n)$ 的时间内 f 把 I_1 映射成 D_2 的一个输入 $f(I_1)$，且 I_1 答案为是当且仅当 $f(I_1)$ 的答案是是。

由 $\propto$ 的定义知，若 $D_1 \propto D_2$，则 D_2 不比 D_1 容易解决。

若 $D_1 \in NPC$，则 $D_1 \in NP$，若 $D_2 \in NPC$，由 NPC 定义，$D_1 \propto D_2$，可见两个 NPC 中的问题 D_1 与 D_2 的关系是 $D_1 \propto D_2$，$D_2 \propto D_1$，即两个问题在时间复杂度意义下的难度是等价的。

若 $D \in NPC$，如果 D 还属于 P，则由 NPC 定义，$\forall D' \in NP$，$D' \propto D$，进而 $D' \in P$，于是 $NP \subseteq P$，又 $P \subseteq NP$，由此可得 $NP = P$，即如果 NPC 中有一个问题是 P 类的，则 NP 中每个问题皆是 P 类的，进而 NPC 中的每个问题也是 P 类的。反之，可知若 NPC 中有某个问题

不属于 P 类,则 NPC 中的每个问题皆不属于 P 类。

NPC 中的一些问题在有无有效算法的意义下是共命运的!

1972 年,Cook 找到了一个问题,且用图灵机证明了它是 NPC 中的问题,从而知 NPC$\neq\emptyset$,这个问题称为“满足问题”,代号 SAT (Satisfiability):

设变量集为 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,X 中每个变量可以取 T 与 F 两个值之一,且 $x_i=T$,则 $\bar{x}_i=F$,$x_i=F$,则 $\bar{x}_i=T$,称 $L=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n\}$为字集合,字集合的子集合称为句子。任给一个句子集合$\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$,是否有赋值方法,使得每个句子 C_i 中皆含 T 值的字?其中 m,n 是任给的自然数。

Cook 证明出:SAT$\in$NPC。

这就是现代数学史上著名的库克定理。

Karp 和 Cook 建立了下面的 NP 完备性定理:

若 $D\in$NPC,$D'\in$NP,又 $D\propto D'$,则 $D'\in$NPC。

用这一定理,由 NPC 的“种子”SAT,通过“$\propto$”,可以繁衍出许许多多 NPC 中的问题。

例如:

图是否哈密顿图?

用 3 种颜色是否可为地图染色,使邻国异色?

货郎问题。

划分问题:任给定正整数 $m_1,m_2,\cdots,m_n$,是否可以把这 n 个数分成两组,使得第一组之和等于第二组之和?

可以严格证明这 4 个问题属 NPC,尽管从表面上看不出它们有多难。

目前已发现且证实的 NPC 中的问题已经数以千计,而且还有不断增加的趋势。

Turing、Cook 和 Karp 的理论告诉人们,什么是计算,计算是一件务实的“工种”,必须在合理的时间内把欲求的结果拿出来,而不是回答“请你从 2^{1000}种情形中挑一种好了”那种想得通就算完事的事,要树立时间复杂度的观念,即使是手中握有最先进的计算机,

如果没有有效算法也是无济于事的(欲了解图论具体内容的读者,可参阅王树禾著《图论及其算法》一书)。

3 数理逻辑与哥德尔命题

1666年,德国数学家莱布尼兹在《论组合的艺术》一书中首次提出数理逻辑的思想,把逻辑推理代数化,把用自然语言含糊表达的形式逻辑符号化。他发明了一套逻辑运算符号,后人称莱布尼兹的这种逻辑学为符号逻辑或数理逻辑。莱布尼兹是数理逻辑的创始人。

命题用逻辑运算符号表达成公式形式,且定义了运算规则;符号语言比自然语言简明扼要,表达无歧义,准确严格。

1847年,英国数学家布尔(Boole Geoege,1815—1864)出版了他的名著《逻辑的数学分析》,创立了逻辑代数(或称布尔代数)。1854年,他又出版了代表作《思维规律的研究》,对逻辑代数化做出了决定性的贡献。由于布尔出色的成就,1857年获英国皇家奖章。

布尔的父亲是一位鞋匠,由于生活所迫,布尔只上了短时间的商业学校便于16岁时当了中学教员,一边教书一边自学高等数学。他先后精通了牛顿的《自然哲学的数学原理》和拉格朗日的《解析函数论》等名著。1839年,布尔希望申请人剑桥大学接受高等教育,当时《剑桥大学期刊》的主编D.F.格雷格里(Gregory)因经常接受布尔的投稿而与布尔成了朋友.格雷格里对布尔说:"如果你为了一个学位而决定上大学,那么你就必须准备忍受大量不适合于独立思考的人的思想戒律。这里,一个高级的学位要求在指定的课程上花费的辛勤劳动与才能训练方面花费的时间一样多。如果一个人不能把自己全部的精力集中于学位考试的训练,那么在学业结束时,他很可能发现自己被淘汰了。"于是布尔放弃了入学的念头,潜心致力于逻辑代数方面的研究。

1849年,34岁的布尔获牛津大学和都柏林大学的名誉博士学

位,且被聘为爱尔兰大学(当时称爱尔兰科克皇后学院)教授。1857年,当选伦敦皇家学会会员。

在布尔的逻辑当中,集合或称类用 $x,y,z\cdots$ 表示,1 表示“万有类”,0 表示“空类”或称“0 类”。他用 xy 表示两集合 x 与 y 的交,布尔称这个运算为“选拔”,$x+y$ 表示 x 与 y 中的所有元素组成的集合,$1-x$ 表示 x 的补,$x-y$ 表示不是 y 的那些 x 的元素组成的集合,x 包含在 y 中写成 $xy=x$,布尔给出的逻辑运算公式有:

$$x(1-x)=0$$

$$xy=yx$$

$$xx=x$$

$$x+y=y+x$$

$$x+(1-x)=1$$

$$x(u+v)=xu+xv$$

$$1\cdot x=x, 0\cdot x=0$$

布尔用大写的 X,Y,Z 表示集 x,y,z 中的元素,且令

$x(1-y)=0$ 表示所有的 X 都是 Y。

$xy=0$ 表示没有 X 是 Y。

$xy\neq 0$ 表示有些 X 是 Y。

$x(1-y)\neq 0$ 表示有些 X 不是 Y。

布尔欲从这些逻辑公式出发,导出推理的规律。

美国数学家 F.T.贝尔(Bell)对布尔的工作评价说:“布尔割下了逻辑学这条泥鳅的头,使它固定,不能再游来滑去。”

布尔是自学成才的大数学家,是 19 世纪数理逻辑的杰出代表。他的几个孩子也都是英国的著名学者,女儿艾丽西亚是数学家,女儿露西是化学教授,小女儿莉莲便是以 E.L.伏尼契为笔名的大作家,她的小说《牛虻》深受全球读者的喜爱。

继莱布尼兹和布尔之后,数理逻辑的第三奠基人是德国数学家弗雷格(Frege, Friedrich Ludwig Gottlob, 1848—1925),毕业于格丁根大学,1873 年获博士学位,1879 年任耶拿大学教授,1879 年出版《概念语言》,建立了一套逻辑符号系统;1884 年出版了《算术基

础》,用逻辑方法给出数的定义与规律。1893 年和 1903 年相继出版了《算术基本规律》第一卷和第二卷,使符号逻辑初具规模。1910 年至 1913 年,罗素与怀特海在《数学原理》中对弗雷格的思想与方法进行了详尽的阐述,使其更加完善。当时参加符号逻辑研究且取得成效的还有皮亚拿。

罗素(Bertrand Arthur William Russell,1872—1970),生于英国威尔士的贵族家庭,学生时代是剑桥三一学院奖学金的获得者,师承怀特海,在数学、哲学、逻辑、社会学、教育学和文学方面写出 40 多部著作,在数学和逻辑学两方面享有盛誉,1934 年,获皇家学会西尔威斯特和摩尔根奖,1940 年获皇家学会功勋奖章,1950 年获诺贝尔文学奖。第一次世界大战时因坚持和平反对战争被剑桥大学开除公职,且被监禁 4 个月,20 世纪 60 年代,因反战主义和呼吁禁止原子弹,再次受到监禁。他是一位思想卓越、能力超众、智力活跃的罕见人物,长寿 98 岁高龄。

弗雷格在《算术基本规律》等著作中建立了所谓"真值函项理论",即今日我们所称的"真值表"运算规则,使命题逻辑算术化,他给出联结命题构成命题公式的 5 个运算符号:

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$$

且规定命题 P 为真时,写 $P=1$,否则写 $P=0$。

五种运算定义如下:

(1) 逻辑否 $\neg$: $\neg 1=0$, $\neg 0=1$。

(2) 逻辑乘 $\wedge$: $1\wedge 1=1, 0\wedge 1=1\wedge 0=0\wedge 0=0$。

(3) 逻辑加 $\vee$: $0+1=1+0=1=1+1, 0+0=0$。

逻辑加与一般算术加法的唯一区别是 $1+1\neq 2$,而是 $1+1=1$,它反映的是"有"与"无",而不在乎有多少。

(4) 逻辑"则"$\rightarrow$:仅当 $P=1, Q=0$ 时,$P\rightarrow Q=0$。其他情形皆真:$0\rightarrow 0=0\rightarrow 1=1\rightarrow 1=1$。

(5) 当且仅当 $\leftrightarrow$: $P=Q$ 时,$P\leftrightarrow Q=1$; $P\neq Q$ 时,$P\leftrightarrow Q=0$。

关于(4)$0\rightarrow 0=1$,据说 20 世纪初有人问罗素:难道下面的推理是正确的吗?"假设 $2+2=5$,则罗素与大主教是一个人。"(罗

素没有当过大主教)罗素答曰:"由于 2 + 2 = 5,而我们又知道 2 + 2 = 4,所以 5 = 4,于是 2 = 1;罗素加上大主教是两个人,由 2 = 1,所以罗素与大主教是 1 个人。"

罗素用这种调侃的方式解释了从"错的前提推导出错的结论"这种推理公式是真的。

对符号逻辑与真值函项理论做出重要贡献的另一位要人是英国数学家德·摩根(De Morgan, Augustus, 1806—1871),他毕业于剑桥三一学院,1828 年任伦敦大学教授,1835 年任伦敦数学会第一任会长,1847 年,他的代表作《形式逻辑》问世,书中给出了著名的"德·摩根律":

$$\neg(P \wedge Q) = (\neg P) \vee (\neg Q)$$
$$\neg(P \vee Q) = (\neg P) \wedge (\neg Q)$$

20 世纪初,数理逻辑向谓词逻辑、证明论和公理集合论方面发展。20 世纪 20 年代提出了著名的"希尔伯特纲领",企图证明数学的无矛盾性。1931 年哥德尔按希尔伯特的思想证明形式数论(算术)系统与形式实数系统无矛盾时,却得出了所谓"不完全性定理"。虽然这个定理给予希尔伯特方案以沉重打击,使得原来意义上的希尔伯特方案未能实现,但这一方案(纲领)起到推动数理逻辑发展的作用,哥德尔不完全性理论就是这一纲领实施过程中产生的重大成果。

从 20 世纪 30 年代开始,数理逻辑的研究重点是:证明论、公理集合论、递归论、模型论、多值逻辑、时态逻辑和模糊逻辑等。数理逻辑不仅进行所谓元数学抽象形式的研究,而且与计算机科学取得了密切的联系,荷兰著名软件与计算机科学家迪克斯特拉(Dijkstra)前几年坦率地说:"假如我早年在数理逻辑上下点工夫,就不会出那么多错误,不少东西数理逻辑上早就讲过了;如果我年轻 20 岁,一定回去学数理逻辑。"可以预言,21 世纪数理逻辑与计算机科学技术的关系,将会像 20 世纪微分方程与物理学的关系一样密切。

1931 年奥地利旅美数学家哥德尔(Gödel Kurt, 1906—1978)建

立了“哥德尔不完备定理”。这个定理指出,在初等数论形式化之后,该系统中存在这样的命题,无法证其真亦无法证其假。这个定理写入他的代表作《论数学原理中的形式不可判定命题及有关系统》中。这篇论文犹如晴天霹雳,如此惊世骇俗的结论在当时数学家的头脑里无异于哥德尔证明了魔鬼的存在一样地不可接受,但哥德尔的理论的确是成立的,它使刚刚排除第三次数学危机,心情略有舒畅的数学家们又面临新的挑战。

1922年,出台了数学史上著名的“Hilbert 纲领”(Hilbert program),它是一个数学无矛盾的方案,其基本思想是:

(1) 把古典数学(例如数论)的内容公理化,再使其形式化,使其内容成为用形式符号与符号序列组成的系统,该系统记成 T_F,T_F 称为形式理论。

(2) 用有穷的方法证明 T_F 的无矛盾性。

(3) T_F 中不会有某个论断 A,A 与 $\neg A$ 可以同时推出。

上述纲领抛出之后,不少数学家为实现希尔伯特的理想作了巨大的努力,取得了一些如意的成果,例如只含加法的算术公理系统是无矛盾的。

意大利数学家皮亚拿(Peano Giuseppe,1859—1932),1889 年出版代表作《算术原理》,是研究数理逻辑与数学基础的奠基性著作,他给出 5 条自然数公理:

(1) 0 是自然数。

(2) 任何自然数的后继是自然数。

(3) 0 不是任何自然数的后继。

(4) 不同的自然数后继不同。

(5) 对任何性质,0 有此性质,又若自然数 n 有此性质,则 n 的后继也有此性质,那么对一切自然数皆有此性质。

他引入二元谓词符号“=”和运算符号“+”、“·”和“′”(后继)。

0 的后继记成 $0'$;$0'$ 的后继记成 $0''$;$0''$ 的后继记成 $0'''$,…、为了方便,$0'$ 写成 $0^{(1)}$,$0''$ 写成 $0^{(2)}$,$0'''$写成 $0^{(3)}$ 等。于是皮亚拿就把算术命题形式化,例如:

"4 是偶数"形式化为$\exists x(0^{(2)}\cdot x=0^{(4)})$。

"2 不是平方数"形式化为$\neg(\exists x)(x\cdot x=0^{(2)})$。

皮亚拿的历史功绩是把算术理论的出发点集中到这 5 条公理(1)~(5)之中,他为算术形式化奠定了基础。

1925 年,希尔伯特在《论无穷》中信心十足地说:"每一个明确的数学问题,必能被正确地解决,因为在数学中没有不可知。"1930 年,希尔伯特在《数学基础》中又明确表态:"我力图用建立数学基础的办法达到一个有意义的目标,这种方法可以恰当地称为可证论。我想把数学基础中所有的问题按照其现在提出的形式一劳永逸地解决,换言之,即把每一数学命题都变成一个可以具体表达的和严格推导的公式,经过这样改造的数学所推导出来的结果就无懈可击,同时又能为整个科学描绘一幅合适的景象。我相信我能用证明论达到这一目标。"

美国著名数学家柯朗(Richard Courant,1888—1972)说:"大卫·希尔伯特是他那个时代真正伟大的数学家之一。他的工作和他从事的科学事业的那种感人的品格,一直深深地影响着数学科学的发展,今天也依然如此。作为一个数学思想家,他眼力深邃,精力充沛,富于独创;他多才多艺,兴趣广泛。这一切使他成为许多数学领域的开拓者。他确是一个出类拔萃的人物:深深地埋头于他的工作,把一切献给他的科学。他又是最好的教师和领头人:待人豁达开朗,诲人不倦;有一股不达目的绝不罢休的劲头。"

希尔伯特(David Hilbert,1862—1943)生于东普鲁士的哥尼斯堡,哥尼斯堡人杰地灵,以七桥问题和出了个大人物希尔伯特而闻名遐迩。希尔伯特 18 岁入著名的哥尼斯堡大学,做韦伯、林德曼等名师的学生,且与闵可夫斯基(Hermann Minkowski)、胡尔维茨(Adolf Hurwiz)结为挚友。林德曼是希尔伯特关于不变量问题的博士论文的导师,1885 年,希尔伯特获博士学位。1893 年任哥尼斯堡大学教授,1895 年任格丁根大学教授。

希尔伯特在代数不变量、代数数域、几何基础、变分法和积分方程、数学基础、广义相对论与量子力学等方面,皆有不平凡的贡

献。

1900 年,希尔伯特在巴黎国际数学家大会上提出了 23 个著名问题,号称 Hilbert 问题:

(1) 连续统假设。

1963 年,P. 科恩(Cohen)证明了连续性假设不可能在策墨罗—弗伦克尔公理系统内判明。

(2) 算术公理的相容性。

(3) 两等底等高四面体等积问题。

1900 年由希尔伯特及其学生 M. 德恩(Dehn)给出解答,不能将这两个等体积的四面体剖分成若干相同的小多面体。

(4) 直线作为两点间最短距离问题。

(5) 拓扑群成为李群的条件。

1952 年,由美国数学家格利森、蒙哥马利和齐平解决了这一问题,证明了不要定义群的函数的可微性假设这一条件,原结论成立。

(6) 物理学各分支的公理化。

(7) 某些数的无理性与超越性。

1934 年苏联数学家盖尔芳德,1935 年德国数学家施奈德各自独立证明了对于任意代数数 $\alpha,\alpha\notin\{0,1\}$,和任意代数无理数 $\beta,\beta\neq 0$,α^β 是超越数;1966 年,A. 贝克(Baker)推广了这一结果。

(8) 素数问题。

黎曼猜想尚未解决,哥德巴赫猜想的最佳结果 1973 年由中国数学家陈景润给出,但离此猜想的最终解决距离尚远。

(9) 一般互反律的证明。

1921 年日本高木贞治(Takagi Teiji),1927 年奥地利阿廷(E. Artin)各自独立解决。

(10) 丢番都方程可解性的判定。

1968 年英国数学家贝克对两个未知数的丢番都方程证明其可以在有限步骤内判定其有无非平凡整数解。1970 年,苏联数学

家马蒂亚谢维奇对一般情形证明不能用有限步骤判定其有无非平凡整数解。

(11) 一般代数数域的二次型论。

1929 年,德国数学家 H. 哈塞(Hasse)和 C. L. 西格尔(Siegel, 1936, 1951)获得有关此问题的重要结果。

(12) 阿贝尔域上的克罗内克定理推广到任意代数有理域。

(13) 不可能用只有两个变数的函数解一般七次方程。

1957 年,苏联数学家阿诺尔德和科尔莫果洛夫给出连续函数情形的解答;若要求解析函数,则问题尚未解决。

(14) 证明某类完全函数系的有限性。

1958 年日本的永田雅宜(Nagata Masayosi)给出否定的解答。

(15) 舒伯特计数演算的严格基础。

代数几何基础已由荷兰数学家范德瓦尔登(Van der Waerden, 1940)和法国数学家 A. 威尔(Weil, 1950)建立。

(16) 代数曲线与曲面的拓扑。

问题的前半部分近年来不断有重要结果,后半部分,1955 年苏联数学家彼得罗夫斯基宣称证明 $n=2$ 时极限环的最大个数不超过 3,1967 年被人发现其证明有错;1979 年中国数学家史松龄、陈兰荪和王明淑等人举出有 4 个极限环的二次微分系统的实例。

(17) 正定形式的平方表示。

1926 年由奥地利数学家阿廷解决。

(18) 由全等多面体构造空间。

该问题由德国数学家比贝尔巴赫(Bieberbach, 1910),赖因哈特(Reinhardt, 1928)和黑施(Heesch, 1935)部分地解决;整个问题尚未解决。

(19) 正则变分问题的解是否一定解析。

1904 年,俄国数学家伯恩斯坦证明一个变元的解析非线性椭圆方程其解必定解析,该结果又由他本人及苏联数学家彼得罗夫斯基等人推广到多变元的椭圆组情形。

(20) 一般边值问题。

偏微分方程边值问题正在发展之中。

(21) 具有给定单值群的线性微分方程的存在性。

1905 年,希尔伯特本人和德国的 H. 勒尔(Röhrl,1957)解决。

(22) 用自守函数将解析关系单值化。

一个变数的情形由德国数学家 P. 克贝(Koebe)于 1907 年解决。

(23) 发展变分学的方法。

希尔伯特本人及其他数学家对此做出重要贡献。

希尔伯特十分强调“问题”的重要性,他说:“只要一门科学分支能提出大量问题,它就充满着生命力,而问题缺乏则预示这门学科的衰亡或中止。”希尔伯特还强调数学的统一性:“数学科学是一个不可分割的有机体,它的生命力正是在于各个部分之间的联系。数学理论越是向前发展,它的结构就会变得越加协调一致,并且这门科学一向相互隔绝的分支之间也会显露出原先意想不到的关系。”柯朗评论说:“希尔伯特以他感人的榜样向我们证明,在应用与纯粹数学之间不存在鸿沟,数学与科学总体之间,能够建立起果实丰满的结合体。”

希尔伯特不仅是 20 世纪数学界的领袖人物,而且是一位优秀的数学教师,这方面与不喜欢教书的高斯有很大区别。希尔伯特讲课简练自然,师生关系十分亲密,他并不特别看重学生的天赋,而是强调“天才就是勤奋”。在学生心目中,希尔伯特不是“远在云端的神”,而是“一位穿杂色衣服的风笛手,用甜蜜的笛声引诱一大群老鼠跟着他走进数学的深河。”他指导了博士生 69 位,其中包括 H. 外尔(Weyl)、R. 柯朗(Courant)、E. 施密特(Schmidt)和 O. 布鲁门萨尔(Blumenthal)等著名数学家,受到希尔伯特教诲的数学家有埃米·诺特(Emmy Noether)、冯·诺依曼(Von Neumann)、高木贞治、C. 卡拉西奥多里(Caratheodory)、E. 策墨罗(Zermelo)等大数学家。希尔伯特的学生继承老师的科学精神,又带出更多的数学精英,形成一种数学人才的雪球效应,希尔伯特在 20 世纪形成的强大而神奇的影响,在数学史上是十分罕见的。

希尔伯特的政治人格十分高崇，他一向反对狭隘的“爱国主义”和“民族主义”，主张科学没有国界。第一次世界大战期间，德国政府发布了狂热沙文主义的《告文化界声明》，几乎所有的著名德国科学家都签名拥护，只有希尔伯特和爱因斯坦拒绝签字。1917年希尔伯特不顾很多人的反对和政府的威胁，为敌国（法国）数学家达布（Darboux）的逝世发表纪念文章。

第二次世界大战期间，希特勒纳粹宣称凡是认为科学没有种族性的任何想法，其本身就包含着毁灭德国科学的胚种，并疯狂迫害犹太人，哥廷根的大量科学家接到“最后通牒”，被迫逃离（大多数去了美国），希尔伯特对此提出了抗议。

希尔伯特的座右铭是：

我们必须知道，

我们必将知道。

1931年，哥德尔的关于不完全性理论的学术报告第一次深翻了数理逻辑这块土地，他从理论的方式居高临下地论证了为什么费了九牛二虎之力，不能全面实现希尔伯特纲领的根源。

哥德尔在确定研究方向时，希尔伯特与W. 阿克曼（Ackermann）的专著《理论逻辑原理》起了关键性作用。此书于1928年出版，书中提出一阶谓词演算的完全性这个未解决的问题，哥德尔把此问题列为主攻方向。1929年夏，23岁的哥德尔成功地解决了这一问题，证明了一阶谓词演算的完全性定理，这一成果使他于1930年2月获得维也纳大学博士学位。随后，他深入研究希尔伯特纲领。1930年哥德尔在哥尼斯堡数学研讨会上首次正式公布了他的研究结果：数论形式系统的不完全性。这一结论与希尔伯特方案的预期正相反，从根本上否定了希尔伯特纲领。

希尔伯特学派的主要成员冯·诺依曼和P.伯奈斯（Bernays）承认了哥德尔的结果之正确性和巨大的潜在意义，希尔伯特开始修正他的方案。从1930年起，哥德尔与希尔伯特学派的著名数理逻辑学家建立起良好的学术关系。

1933年，哥德尔成了维也纳大学的无薪讲师。同年赴美讲

学,在美国数学会作了《数学基础现状》的报告;1934 年又在美国哲学学会上以《包含算术的任意形式系统内不可判定命题的存在性》为题做了讲演。

1938 年,哥德尔与舞女安迪结婚,妻比他大 6 岁,一生无子女。虽然当时哥德尔已经是 3 次赴美讲学,解决了几项重大数学问题的世界知名数学家,但维也纳大学仍然只让他任无工资的讲师。9 月 25 日,哥德尔申请转为正式讲师,校方仍未答应,他只好携妻赴美定居,离开了纳粹专制的维也纳,成了普林斯顿高级研究院的成员。在普林斯顿哥德尔与物理学家爱因斯坦(Einstein)、数理经济学家 O. 摩根斯顿(Mergenstern)结成了"三大科学家友谊村",1948 年 4 月 2 日,三人一同去美国移民局取得了美国国籍。

1953 年,哥德尔晋升为普林斯顿高级研究院教授;1951 年获爱因斯坦科学奖;1966 年哥德尔拒绝接受奥地利科学院授予的荣誉院士称号,1975 年获"美国总统奖"(当时总统是福特)。

哥德尔是亚里士多德和莱布尼兹以来最伟大的逻辑学家。

为了理解哥德尔工作的原始思路,我们介绍所谓"哥德尔命题",这个命题是 1931 年哥德尔提出的:

$$A : A \text{ 不可证。}$$

对于这个哥德尔命题,A 与 $\neg A$ 都不可证。

(1) 由于任何假命题不可证,所以 A 不能为假。事实上,若 A 是假的,即"A 不可证"是假的,于是 A 不不可证,即 A 可证,至此得出 A 是假的且 A 可证,与假命题不可证矛盾。故得证 A 是真的。

(2) 若 A 可证,则"A 不可证"是假的,又"A : A 不可证",故 A 是假的,与(1)中已证出 A 是真的矛盾,故 A 不可证。

(3) 由(1)A 是真的,故 $\neg A$ 是假的,所以 $\neg A$ 不可证。由(2)与(3),A 与 $\neg A$ 同时不可证。

在哲学与逻辑学中,这种两难选择的问题绝非仅有,例如古希腊就有一个著名的"柏拉图非存在之谜":

柏拉图问:"飞马存在吗?"

"飞马"原指诗神缪斯的坐骑,象征诗的灵感。客观地讲,飞马并不存在,于是答曰:"飞马不存在。"

谈论一个不存在的东西"怎样怎样"(例如什么颜色等)是荒唐的,既然回答说"飞马不存在",那么讨论一个并不存在的飞马如何如何也就是荒唐的,所以谈飞马的不存在性也是荒谬的。既"飞马不存在"不能成立,从而推导出"飞马存在",但飞马存在也是不成立的,事实上,神并不存在,何谈它的马。

这个问题弗雷格、罗素和蒯因都曾研究过,作为著名的逻辑学家,哥德尔也可能在1931年以前就已知晓。它和哥德尔命题何其相似。

4 数　　论

数论是研究数的科学,含初等数论、代数数论和解析数论等分支。

初等数论是以算术方法为主要研究方法的数论分支,它的历史和人类历史一样长。

公元前6世纪,古希腊的毕达哥拉斯就开始研究整数的可除性,提出了奇数、偶数、素数和合数等数论中的基本概念,他还初步研究了所谓完全数和亲和数等问题。

所谓完全数是指一个自然数 N,其因数(它本身不算)之和恰为 N。例如 $6=1+2+3$,6是完全数,比6大的完全数前5个为24,28,496,8128,33550336。

欧几里得(公元前330—公元前275)关于完全数得出下面的非平凡结果:

若 n 是大于1的自然数,且 2^n-1 是素数,则

$$N = 2^{n-1}(2^n - 1) \tag{5.4}$$

皆为完全数。

事实上,由于 2^n-1 是素数,则 N 的因数是:

$$1,2,2^2,\cdots,2^{n-1};\ 2^n-1,2(2^n-1)\cdots,2^{n-2}(2^n-1)$$

这些因数之和为

$$(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})+$$
$$(2^n-1)(1+2+2^2+\cdots+2^{n-2})=$$
$$(2^n-1)+(2^n-1)(2^{n-1}-1)=$$
$$2^{n-1}(2^n-1)=N$$

2300多年前欧几里得就建立且证明了这一公式,令人叹为观止!

18世纪欧拉证明了欧几里得给出的公式(5.4)是偶的全体完全数。欧拉指出,当 $n=31$ 时,由欧几里得公式(5.4)求得一个很大的完全数

$$2305843008139952128$$

至今无人证明,奇数中能否有完全数。

欧几里得公式(5.4)中的 2^n-1 是否为素数是个不小的难题。1644年,法国数学家梅森(Mersenne Marin,1588—1648)在他的著作《物理数学探索》中提出"梅森数"的概念,梅森数指 n 是素数时,2^n-1 形的数。事实上,在欧几里得公式中,2^n-1 是素数的必要条件是 n 是素数,不然,当 $n=n_1n_2(n_1,n_2>1)$,则

$$2^n-1=2^{n_1n_2}-1=(2^{n_1}-1)(1+2^{n_1}+2^{2n_1}+\cdots+2^{(n_2-1)n_1})$$

使得 2^n-1 不是素数。

是否有无穷个梅森数,它们为素数? 至今无人解决。

1998年发现一个很大的(至今是最大的)素梅森数

$$2^{3021377}-1$$

梅森是对法国科学有大贡献的数学家之一,他长期以耶稣教的神甫为职业,但热衷于哲学和数学。1625年,梅森创建"梅森学院",成为1666年法国科学院的前身,他与伽利略、费马、笛卡儿和帕斯卡等著名科学家是好朋友。

公元前300年,欧几里得证明了素数有无穷多个,且给出求最大公约数的算法。

公元前6世纪,毕达哥拉斯还定义了所谓"亲和数":亲和数指两个自然数 n_1 和 n_2,n_1 的全体约数(含1不含 n_1)的和恰为 n_2,n_2 的全体约数之和恰为 n_1。例如

$$\begin{cases}1210 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 37 + 74 + 148 + 296 + 592 \\ 1184 = 1 + 2 + 5 + 10 + 11 + 22 + 55 + 110 + 121 + 242 + 605\end{cases}$$

1210 与 1184 是一对亲和数。

1974 年，H.J.莱尔发现一对很大的亲和数：

$$\begin{cases}n_1 = 3^4 \times 5 \times 11 \times 5281^{19} \times 29 \times 89 \times (2 \times 1291 \times 5281^{19} - 1) \\ n_2 = 3^4 \times 5 \times 11 \times 5281^{19} \times (2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 1291 \times 5281^{19} - 1)\end{cases}$$

1640 年，费马建立了所谓“费马小定理”：

若 p 为素数，则 $a^p \equiv a(\bmod p)$，其中 a 为任意整数。

1736 年，欧拉给出费马小定理的证明。

1772 年，拉格朗日证明了费马提出的“四平方定理”：每个正整数可表成 4 个整数的平方和。

费马还提出形如 $2^k + 1$ 的费马数问题，他猜想 $2^{2^n} + 1$ 形费马数皆素数，但欧拉给出反例

$$2^{2^5} + 1 = 641 \times 6700417$$

费马（Pierre Fermat，1601—1665）是法国数学家，生于法国南部的波蒙地区。上大学时学的是法律，毕业后以律师为业，从 30 岁开始迷恋数学，他谦逊文雅，敏于思而慎于言，他发表的成果极少，然贡献极大，他在微积分、解析几何、概率论和数论等领域都有丰富的原始创新。但费马有“研而不作”的习惯，很少动笔，费马去世

接圆锥的最大体积、球内接圆柱的最大表面积问题。费马是最早发现求函数极值方法的数学家之一。

费马还求出曲线 $x^p = y^q$ 在$[0, x]$区间上与横坐标轴围成的面积，相当于求积分 $\int_0^x x^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}x$。

当然，由于费马没有明确地用极限定义的导数与积分的概念，所以史学家戏称“费马射中了微积分之鹿，鹿带着费马的箭逃跑了”。但无论如何，费马是发明微积分的先行者之一。

费马最有影响的工作是开创了近代数论的研究。谈到数论，费马说：“全部数论问题就在于以何种方式把整数分解为素数之积。”

1637 年，费马阅读丢番都的名著《算术》拉丁本第二卷第八个命题“把一个平方数分为两个平方数”时，用拉丁文在此书的页边上写下下列批语：

“将一个立方数分为两个立方数，一个四次幂分为两个四次幂，或者一般地将一个高于二次的幂分成两个同次幂，这是不可能的。关于此我发现了一个美妙的证法，但这个页边太窄，写不下。”

这段话就是数学史上著名的“费马大定理”。关于费马宣称的他“发现了美妙证明”是否真有此事，已成千古之谜。

费马大定理“$n>2$ 时，$x^n + y^n = z^n$ 不存在 $xyz \neq 0$ 的整数解”在数学史上几经设巨额悬赏征解，应征证明费马大定理的著名数学家有：

欧拉（L. Euler）、热尔曼（S. Germain）、高斯（C. F. Gauss）、拉梅（G. Lame）、狄里克雷（P. G. L. Drichlet）、勒让德（A. M. Legendre）、刘维尔（J. Liouville）、库默尔（E. E. Kummer）、范迪维尔（H. S. Vandiver）、志村五郎、谷山丰、符莱（G. Frey）、法尔廷斯（G. Faltings）、吕贝特（K. A. Ribet）等。

冲击费马大定理的还有成千上万的数学爱好者和不怎么出名的许多数学家。

人们在千方百计往证费马大定理的过程中，发展出很多有用

的数学方法与理论，促进了代数数论等学科的繁荣，希尔伯特称费马大定理是一只会下金蛋的鹅。

1770 年，欧拉证出 $n=3$ 时费马大定理成立。但欧拉在证明过程中意识到 $n=3$ 与一般情形有本质区别。

1825 年，狄里克雷和勒让德证明了 $n=5$ 的情形费马大定理成立，所用方法是欧拉 1770 年方法的推广。

1839 年，拉梅证明了 $n=7$ 的情形。

1832 年，狄里克雷证明了 $n=14$ 的情形。

1847 年，拉梅向巴黎科学院报告，声称他证明了费马大定理，刘维尔当场指出拉梅的证明有不可补救的错误，从此，用初等数论的方法证明费马大定理的热潮告一段落。

到 1993 年，已经证出 n 不超过 4 百万时，费马大定理是成立的，但是数学不是物理，400 万次实验的成功仍然得不出任意自然数费马大定理成立。

在往证费马大定理的数学家队伍当中，有一位令人肃然起敬的女数学家，她就是法国的索菲娅·吉尔曼(Sophie Germain，1776—1831)。她在冲击费马大定理时，提出所谓吉尔曼素数的概念，当 p 与 $2p+1$ 皆素数时，p 称为吉尔曼素数。目前已知的最大的吉尔曼素数是

$$2687145\times3003\times10^{5072}-1$$

但不知是否有无穷个吉尔曼素数。

吉尔曼时代，女性受歧视，大学本科不收女生，她只好做巴黎综合工科学校的函授生，凭她的坚韧不拔的个性和对数学的迷恋，终于基本上靠自修成长为一位著名的数学家，她因为解决了薄片振动问题而获法兰西研究院奖。她在科学活动中隐瞒了自己的女儿身份，与世界上著名的数学家高斯、勒让德等人只能通信研讨，且给自己起了一个男性假名勒布郎(Leblane)。

1807 年，高斯终于查觉了勒布朗先生就是吉尔曼小姐，高斯激动地说："当我看到我尊敬的信友勒布郎先生变成一个极其杰出的女士时是多么敬佩和吃惊！她给出了一个使人难以相信的光辉

榜样。一般而言，对抽象科学，尤其是对数学的奥秘，很少有人感兴趣，这门卓越的科学只向那些有勇气深入探索的人展现她迷人的魅力。由于我们的习惯和偏见，女性要熟悉这些棘手的研究必然遇到比男子多得多的困难。当一个女性成功地超越这些障碍，深入到其中最难解的部分，毫无疑问，她必定具有最崇高的勇气、非凡的才能和超人一等的天才。"

1801年，24岁的高斯发表名著《算术研究》，它是数论从古典数学分支进入现代数学分支的转折点，数论从此由初等数论为重点转入代数数论为重点的新阶段。

高斯(C.F.Gauss，1777—1855)生于德国的不伦瑞克，其父是瓦匠、花匠和运河看管工，其父的意见是让儿子高斯接他的班，长大后也成为瓦工或花匠。其母虽贤惠，但与其父一样没有受过学校教育，幸亏高斯的舅舅颇具慧眼与远见，他发现了高斯的异乎寻常的才智，并对高斯进行了早期启蒙教育。

高斯是数学史上罕见的神童，据说3岁时他就发现了其父帐簿上的一处计算错误，另一则广为人知的传说是他10岁时，算术课老师出了一道题是从1把连续的自然数一直加到100，老师刚刚在黑板上写完此题，高斯即刻举手做答曰：5050。老师布特纳高兴极了，他发现了高斯的天才，特地买了一本算术书送高斯学习。1788年高斯小学毕业后进入文科中学哲学班学习。

高斯的天才引起不伦瑞克公爵的注意，公爵资助高斯完成了中学与大学的学业。15岁时，高斯入卡罗林学院学语言学与数学，17岁的助教巴特尔斯(J.M.Bartels)酷爱数学，与高斯一起研读了牛顿、拉格朗日、欧拉等人的著作，后来巴特尔斯成了数学教授，非欧几何创始人罗巴切夫斯基是巴特尔斯的学生，而高斯则成了与阿基米德、牛顿齐名的数学史上三大数学家之一，被数学界誉为"数学王子"。M.克莱因说："如果我们把18世纪以前的数学家想象成一系列高山峻岭，那么一个使人肃然起敬的峰巅便是高斯。"高斯对数学有着全心全意的热爱，他说："数学是科学的皇后，而数论则是数学的女王。"又说："天文学和纯数学，是我心智的罗盘永

远指向的磁极。”

高斯的《算术研究》中3个重点内容是：同余、复整数和型的理论。

同余在欧拉、拉格朗日和勒让德的著作中已有论述，但引入符号

$$a \equiv b(\bmod m)$$

的第一人是高斯，且给出了中国剩余定理的证明。高斯还证明了

$$Ax^n + Bx^{n-1} + \cdots + Mx \equiv 0(\bmod p)$$

不可能有多于 n 个互不同余的根，其中 p 是素数，且 p 不能除尽 A。

在《算术研究》中，高斯研究了二次同余方程

$$x^2 \equiv a(\bmod p)$$

其中 p 是素数，a 不是 p 的倍数。

欧拉发现了一个所谓“二次互反律”：

设 p,q 是两个相异的奇素数，若 $\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{p-1}{2}\right)$ 是偶数，则 $x^2 \equiv p(\bmod q)$ 有解当且仅当 $x^2 \equiv q(\bmod p)$ 有解；若 $\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{q-1}{2}\right)$ 是奇数，则 $x^2 \equiv p(\bmod q)$ 无解当且仅当 $x^2 \equiv q(\bmod p)$ 有解。

上述二次互反律欧拉提出时并未加证明，后来勒让德给出了一个不完全的证明。1796年，高斯在《算术研究》中给出了完全严格的证明。之后，高斯对二次互反律又给出了7个不同的证明。高斯十分欣赏欧拉提出的这个二次互反律，称其为“算术中的宝石”。

1799年高斯获哈勒大学博士学位，在他的学位论文《所有单变量的有理代数函数都可分解为一次或二次因式定理的新证明》中建立且证明了代数基本定理，成为方程理论的基石。此后，高斯在3A(算术 Arithmatic、代数 Algebra 和分析 Analysis)领域里做出了巨大的贡献。

高斯是发明“非欧几何”的第一人，但他胆小怕事，担心发表与经典欧几里得几何传统相违的理论会招惹别人的非议，不敢公开自己的成果。1846年，他给舒马赫尔的信中说：“罗巴切夫斯基称

之为'假想'的几何学,我对此有同样的观念已有54年了。在罗巴切夫斯基的著作中,我没有找到对自己是新的东西。我建议您研究一下这样的著作,它会使您受益匪浅。"

美国数学家贝尔(Bell)在《数学人物》一书中评论高斯说:"如果他能把所知道的一些东西及时透露出来,很可能现在数学早比目前要先进半个世纪或更多时间,而不是把人们最好的努力花在高斯在他们出生之前就知道的东西上。而那些非欧几何的研究者,可以把他们的天才用到其他地方去。"

高斯的著作、笔记、手稿极多,生前发表的比例很小,他去世之后,哥廷根大学出版了《高斯全集》共11大卷。

高斯在科学的王国中处处留芳,例如他对复变、超几何级数、椭圆函数、统计数学、位势论、天文学、电磁学、光学等方面皆有出

定理的人"。这一年,吸引了621位证明费马大定理的报名者,从而使费马大定理又热了起来。

1986年,在巴黎的一个数论讨论班上,英国数学家维尔斯(A. Wiles)声称他将投入费马大定理的研究工作。此后的7年,维尔斯竭尽全力默默无闻地投入费马大定理的证明。1993年6月,维尔斯在英国剑桥大学的一次学术讨论会上报告他的主要结果,宣布了他已证明费马大定理。他的报告长达200多页。

一个由6名专家组成的评审组立即对维尔斯的工作进行审查。6位专家以数学家的严格性和良知一丝不苟地逐句推敲,结果查出了维尔斯的证明有漏洞。维尔斯也承认自己证明确实存在6人小组所指的漏洞。于是维尔斯在其后的一年多时间里,全身心投入修改工作。到1994年9月,漏洞终于被维尔斯修补,通过了审查小组的权威认可。至此300多年历史的数学难题之证明终于浮出水面,费马大定理成立。维尔斯的关于费马大定理的证明,于1995年5月分成两篇论文发表在美国《数学年刊》上,一篇的标题是《模椭圆曲线与费马大定理》,另一篇的标题是《某些赫克代数的环论性质》(与泰勒(R.Tayler)合写)。

1994年,维尔斯刚过40岁,超过了菲尔兹奖的年龄限制;1996年,获沃尔夫奖;1998年,在柏林国际数学家大会上,维尔斯获特别荣誉奖。

在代数数论的历史上,还有一些重要的成就(关于超越数的理论也有人把它划到所谓超越数论的范畴)。

1884年,刘维尔构造性地证明超越数的存在性,而且证明

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} g^{-n!} \qquad g = 2,3,\cdots,n,n+1,\cdots$$

都是超越数。

1873年,厄米特证明e是超越数。

1882年,林德曼证明π是超越数。

19世纪超越数论中的一项重要成果是林德曼—外尔斯特拉斯定理(简称林—外定理):

若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是两两不同的代数数，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是非零代数数，则 $\sum_{i=1}^{n}\beta_i e^{\alpha_i}\neq 0$。

且从林—外定理得出如下结论：

(1) 若 α 是非零代数数，则 $\sin\alpha,\cos\alpha,\mathrm{tg}\alpha$ 皆超越数。

(2) 若 $\alpha\notin\{0,1\}$，α 是代数数，则 $\ln\alpha$ 是超越数。

1929 年，盖尔芳德证明：$\alpha\notin\{0,1\}$，α 是代数数，β 是二次复代数数，则 α^β 是超越数，特别地，e^π 是超越数。

1930 年，库兹明把盖尔芳德的结论推广到 β 是实二次代数数的情形；特别地，$2^{\sqrt{2}}$ 是超越数。

1966 年，贝克证明了如下重要结论：

(1) 代数数的对数线性组合（组合系数是代数数）不等于零，则必为代数数。

(2) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_0,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是非零代数数，则 $e^{\beta_0}\alpha_1^{\beta_1}\alpha_2^{\beta_2}\cdots\alpha_n^{\beta_n}$ 是超越数。

(3) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是不为 0 与 1 的代数数，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是代数数，且 $1,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 在有理数域 Q 上线性无关，则 $\alpha_1^{\beta_1}\alpha_2^{\beta_2}\cdots\alpha_n^{\beta_n}$ 是超越数。

贝克由于超越数上的成果和其他贡献，获 1970 年菲尔兹奖。

欧拉常数

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$

是否超越数，至今无人解决。

解析数论是采用分析方法研究数的性质的数论分支。欧拉是解析数论的创始人。

欧拉用分析的方法证明了欧拉恒等式

$$\prod_p(1-p^{-s})^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s},s\in\mathbb{R},p\text{ 是素数}$$

欧拉用这一公式给出素数有无穷个的新证明。

1837 年，狄利克雷证明首项与公差互素的算术级数中有无穷项是素数。

1859 年，黎曼令欧拉恒等式中右端 s 为复自变量，得到所谓“黎曼函数 $\zeta(s)$”

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

把复变函数论中的方法引入数论研究，开创了解析数论的新时代。

黎曼猜想：$\zeta(s)$的复零点都在直线 $\mathrm{Re}s = \frac{1}{2}$ 上。

这是至今无人解决的数学史上最为著名的猜想之一。数学家们对此猜想的研究推动了数学科学的发展。

1852 年，切比雪夫证明了如下命题：

(1) 存在正的常数 C_1, C_2，使得

$$C_1 \frac{x}{\ln x} \leqslant \pi(x) \leqslant C_2 \frac{x}{\ln x}, x \geqslant 2$$

其中 $\pi(x)$是不大于实数 x 的素数的个数。

(2) 在 x 与 $2x$ 之间有素数存在，其中 $x > 2$。

命题(2)是著名的贝朗特猜想。

1896 年，J. 阿达马和 C. dela 瓦莱—普桑用复变函数论的理论同时证明了所谓“素数定理”：

$$\lim \frac{\pi(x)\ln x}{x} = 1$$

1949 年，塞尔伯格和厄尔多斯给出了不用复变与微积分的初等证明，引起了数学界的惊叹！

素数定理是素数分布理论的中心定理。

堆垒数论是数论中最有魅力的分支之一，堆垒数论又称可加性数论，它是 17 世纪，由费马等数学家开创的。

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是$\mathbb{N}$的子集，$\mathbb{N}$是非负整数集合，$\forall n \in \mathbb{N}$，问方程

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

是否有解？有几组解？其中 $k \in \mathbb{N}$，$a_i \in A_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$。

上述问题称为堆垒问题。

1636 年，费马提出如下的“费马多角数猜想”：

每个自然数都可以表成 m 个 m 阶多角数之和。

所谓 m 阶多角数是指：设 $m \geqslant 3, m \in \mathbb{N}$，由 $a_0^{(m)} = 0, a_{n+1}^{(m)} = a_n^{(m)} + (m-2)n + 1, (n = 1,2,\cdots)$ 确定的数列 $\{a_n^{(m)}\}$ 中的整数叫做 m 阶多角数，通项为

$$a_n^{(m)} = \frac{1}{2}(m-2)n^2 - \frac{1}{2}(m-4)n$$

例如四角数（$m=4$）皆平方数。

1772 年，拉格朗日对 $m=4$ 的情形证明了费马多角数猜想。

1798 年，勒让德对 $m=3$ 的情形证明了费马多角数猜想。

1813 年，柯西彻底证明了费马多角数猜想。

在数论中还有一个未彻底解决的问题叫做“平方和问题”：

求方程 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_s^2 = n$ 的整数解的个数 $r_s(n)$，其中 s 与 n 是已知的正整数。

1829 年，雅可比得出

$$r_2(n) = 4 \sum_{d \mid n, 2 \nmid d} (-1)^{\frac{d-1}{2}}$$

$$r_4(n) = 8 \sum_{d \mid n, 4 \nmid d} d$$

1919 年，哈代得到了 $s \geqslant 5$ 时 $r_s(n)$ 的渐近公式。

1926 年克格斯特曼，1962 年埃斯特曼分别独立地提出 $n = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_4^2$ 的平方和问题。

1953 年，中国著名数学家华罗庚出版名著《堆垒素数论》，是堆垒数论的经典专著。

哥德巴赫猜想是堆垒数论中最难解决的老大难问题之一。

1742 年，德国数学家哥德巴赫（Christian Goldbach，1690—1764）与他的好友欧拉的几次通信中，提出了下面的问题：

（1）每个大于 4 的偶数皆是两素数之和。

（2）每个大于 7 的奇数皆是 3 个素数之和。

问题(1)与问题(2)即著名的哥德巴赫猜想。

欧拉在回信中说:“我认为这是一个肯定的定理,尽管我还不能征服它。”

1937年,苏联数学家维诺格拉多夫基本上证明了哥德巴赫猜想(2),从而猜想(2)称为“哥德巴赫—维诺格拉多夫定理”(但此定理只证明出当奇数 $n > e^{e^{16\,038}}$ 时成立)。

事实上,若猜想(1)能先行证出,则猜想(2)可以作为猜想(1)的推论,因为 $2n+1=2(n-1)+3$。偶数 $2(n-1)$ 可表成两素之和,所以 $2n+1$ 可表成3个素数(一个是3)之和。

如果把命题“充分大的偶数是不超过 r 个素因子之积与不超过 s 个素因子之积的和”记成 (r,s),则哥德巴赫猜想可以记成(1,1)。

1920年,挪威数学家布龙证明了(9,9)。

1921年,英国数学家哈代在哥本哈根数学会演讲说:“哥德巴赫猜想可能是没有解决的数学问题当中最困难的一个。”

1938年,中国数学家华罗庚及一些外国数学家独立地证明哥德巴赫猜想对几乎所有的偶数成立,即若 $M(x)$ 是不超过 x 而又不能表成两素数之和的偶数的个数,那么

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{M(x)}{x}=0$$

1948年,匈牙利数学家雷尼证明了 $(1,s)$。

1950年,挪威籍美国数学家塞尔伯格提出一种筛法,宣布利用他的筛法可以证明(2,3)。

1956年,中国数学家王元证明了(3,4)。

1956年,苏联数学家维诺格拉多夫证明了(3,3)。

1957年,王元证明了(2,3)。

1962年,中国数学家潘承洞证明了(1,5)。

1963年,潘承洞与巴尔巴恩独立证明了(1,4)。

1965年,维诺格拉多夫、布赫夕塔布和朋比尼独立证明了(1,3)。

1966年,中国著名数学家陈景润证明了(1,2)。

陈景润的记录至今无人打破(打破就证明了哥德巴赫猜想(1,1))。

陈景润证明:每一个充分大的偶数,都可以表成一个素数与一个不超过两个素数之积的和。

陈景润是中国福建人,1933 年 5 月 22 日生于福州市,父亲是邮局职员,家境贫寒。1953 年厦门大学数学系毕业,分配到北京第四中学任教,陈性格内向,极不善与人交往,不能适应中学教员的职业。1954 年经厦门大学校长王亚南的推荐,陈景润到厦门大学作助教,开始研究哥德巴赫猜想。1957 年,经华罗庚推荐调到中国科学院任实习研究员,1977 年任研究员,1988 年提升为一级研究员,中国科学院学部委员。

陈景润对数学研究的奋斗精神是数学家的榜样,他在"文革"结束以前,始终过着普通人难以忍受的艰苦生活,坚持不懈地进行解析数论的科研工作,无论是在"文革"浩劫中遭受残酷批斗与打击的年月,还是在疾病折磨的日子,他都没有放弃自己的追求。他关于哥德巴赫猜想的著名成果,就是在"文革"的困难年代搞出来的。多年的营养不良和艰苦工作,严重地损害了他的健康,患了帕金森氏综合症。陈景润发表论文 70 余篇,专著 4 部。由于在哥德巴赫猜想等问题上的杰出贡献,1982 年,获国家自然科学一等奖,1978 年—1979 年,应美国普林斯顿高级研究院等学术机构之邀,到美、英、法等国讲学。

除了哥德巴赫问题上的成就外,陈景润还有大量的出色工作。

1963 年,陈景润得到球 $u^2+v^2+w^2\leqslant x$ 内整点个数 $p(x)$ 的估计式

$$p(x)=\frac{4}{3}\pi x^{\frac{3}{2}}+O(x^{\frac{2}{3}+\epsilon})$$

这个结果仍然是目前最好的。

1965 年,陈景润对于黎曼函数 $\zeta(s)$ 的估计式

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)=O(|t|^{\alpha}(\ln|t|^{\beta})$$

中的 α 与 β,给出 $\alpha=\frac{6}{37}$,$\beta=0$。(1988 年,哈斯利给出 $\alpha=\frac{9}{56}$,$\beta=$

2。)

1837 年,G.L.狄利克雷(Dirichlet)证明:

若 k 与 l 是两个互素正整数,则算术级数序列 $kn+l(n=1,2,\cdots)$中必有无穷个素数。

求$\{kn+l\}$中最小的素数 $p(k,l)$,这是又一个数论难题。

1944 年,林尼克首先证明:存在绝对常数 $C>0$,使得

$$p(k,l)=O(k^C)$$

1965 年,陈景润得到 $C\leqslant 777$;1989 年,陈景润与刘健民合作得到 $C\leqslant 13.5$;1991 年,王炜得 $C\leqslant 8$。P_m 表示至多 m 个素因子的正整数(亦称"殆素数")。1975 年,陈景润证明:当 x 充分大时,$P_2\in(x-\sqrt{x},x]$。1979 年,陈景润又进一步得出:当 x 充分大时,$P_2\in(x-x^{0.477},x]$。

E(x)表示哥德巴赫例外数,即不能表成二奇素数之和的偶数。

1937 年,华罗庚等人证明:对任给的 $A>0$,

$$E(x)=O\left(\frac{x}{(\ln x)^A}\right)$$

由此推出几乎所有的偶数皆可表为二奇素数之和。

1975 年,H.L.蒙哥马利等人证明:存在常数 $\delta>0$,使得

$$E(x)=O(x^{1-\delta})$$

1979 年,陈景润与潘承洞定出 $\delta>0.01$。1990 年,陈景润又进一步得 $\delta>0.04$ 及 $\delta>0.05$。

1966 年,陈景润宣布他证明了(1,2),但几个引理未写出详尽证明,当时(1,2)未得到国际数学界的承认。

1973 年,陈景润发表了(1,2)的详细证明,且对 1966 年的成果有所改善,立即引起国际数学界的轰动,被公认为是对哥德巴赫猜想的重大贡献,国际数学界称陈景润的(1,2)为"陈氏定理"。

关于素数的难题很多,1976 年,美国数学家阿波斯托尔在《解析数论导引》一书中开了一个未解决的有关素数问题的 12 难题题谱:

(1) 是否存在大于 2 的偶数,它不是两素数之和?

(2) 是否存在大于 2 的偶数,它不是两素数之差?

(3) 是否存在无穷多对孪生素数?

(4) 是否存在无穷多梅森素数?

(5) 是否存在无穷多梅森数是复合数?

(6) 是否存在无穷多费马素数?

(7) 是否存在无穷多费马数是复合数?

(8) 是否存在无穷多个素数形如 x^2+k,其中 x 是整数?

(9) 是否存在无穷多素数形如 x^2+k,其中 k 是给定整数?

(10) 对每一整数 n,能否在 n^2 与 $(n+1)^2$ 之间至少存在一个素数?

(11) 对每一整数 $n>1$,是否在 n^2 与 n^2+n 之间都存在素数?

(12) 是否有无穷个素数,其每一位都是 1?

华林问题是堆垒数论中十分有趣十分困难的问题。

1770 年,华林猜测:任一自然数可用不超过 4 个平方数的和、不超过 9 个立方数的和或不超过 19 个四次方数的和来表示;一般而言,对每个整数 $k\geqslant 2$,皆存在一个仅依赖于 k 的整数 $s=s(k)$,使每一个非负整数 n 均可表成 s 个非负整数的 k 次幂之和,即不定方程

$$n=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_s^k$$

对所有整数 $n\geqslant 0$,有非负整数解 $x_j,1\leqslant j\leqslant s$。

此即华林问题。

1909 年,希尔伯特证明了 $s(k)$的存在性。

对于 $s(k)$的最小值 $g(k)$,1770 年,拉格朗日证明 $g(2)=4$。

1909 年,威弗里奇证明 $g(3)=9$。

1770 年,华林猜测有公式

$$g(k)=2^k+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]-2$$

1957 年,马勒尔证明对充分大的 k 华林公式

$$g(k)=2^k+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]-2$$

成立。

1964 年，斯泰姆勒尔证明 $6 \leqslant k \leqslant 200000$ 时，华林公式成立。

1964 年，中国陈景润证明 $g(5)=37$。

1985 年，巴拉萨布雷尼安证明 $g(4)=19$。

设 $G(k)$表示使方程

$$x_1^k+x_2^k+\cdots+x_s^k=n$$

对于充分大的 n 有非负整数解的 $s(k)$的最小值。

1939 年，达文波特证明 $G(4)=16$。

1947 年，林尼克证明 $G(3)=7$。

1959 年，维诺格拉多夫证明：当 $k \geqslant 170000$ 时，

$$G(k) \leqslant k(2\ln k+4\ln\ln k+2\ln\ln\ln k+13)$$

卡拉楚巴进一步改进成

$$G(k)<2k\log k+2\log\log k+12k。$$

我国数学家华罗庚对华林问题有卓越贡献。

1938 年，华罗庚得出不等式

$$G(k) \leqslant 2^k+1$$

华罗庚是 20 世纪最富传奇性的数学家之一，他在数论、代数、几何与复分析方面为 20 世纪的数学做出了光辉的贡献。

华罗庚 1910 年生于江苏金坛县，其父经营一个家庭式小杂货店，他初中毕业后因家贫不能入高中继续上学，后考入上海中华职业学校商科，因无力交纳学杂费而弃学，回家帮助其父经营小商店，并开始自学数学。1928 年染上伤寒，左腿留下残疾。

1930 年，华罗庚第二篇论文《苏家驹之代数五次方程式解法不能成立的理由》在上海《科学》杂志上发表（第一篇数学论文于 1929 年在《科学》杂志发表），引起清华大学数学系主任熊庆来的注意，当时熊不知这位华罗庚是何人，熊庆来从系里一位金坛籍的教师那里了解到华罗庚只是个初中毕业生，十分受感动并邀请华罗庚到清华大学工作，华罗庚于 1931 年到清华大学任数学系助

1976 年，江青一伙灭亡，华罗庚的学术活动更加活跃。完成的专著有《从单位圆谈起》(1977)；《数论在近似分析中的应用》(1978，与王元合作)；《华罗庚论文选集》由 H. 哈贝斯坦(Halberstam)主编，于 1983 年由施普林格出版社出版。1978 年华罗庚被任命为中国科学院副院长。1980 年任中科院数学所所长。华罗庚

1950 年—1983 年任中国数学会理事长。

1985 年 6 月 12 日，华罗庚在东京大学作学术报告，讲完最后一句话时，因心脏病突发而谢世。

华罗庚曾获法国南锡大学(1980)、香港中文大学(1983)、美国伊利诺大学(1984)荣誉博士学位，被选为美国科学院院士(1982)、第三世界科学院院士(1983)和德国巴伐利亚科学院院士(1985)。

华罗庚的名言是：

聪明在于学习，

天才在于积累。

华罗庚成功地从一位只有初中文凭的天才少年自学数学成为一位造诣高深、有多方面成就的数学大师，这一切靠的主要是他惊人的毅力和勤奋。

素数是数论的永恒主题。1849 年，提出波林奈克猜想(孪生素数猜想)：孪生素数有无穷多对儿。

所谓孪生素数是指差为 2 的一对素数，例如 3 与 5，11 与 13 等。

$332880\times(2^{607}-1)^2\pm1, 455892\times(2^{1279}-1)^2\pm1,$

$260497545\times2^{6625}\pm1$。

（1）如何证明或反驳孪生素数猜想？

（2）如何给出更多更大的孪生素数对？

这是两个极难的数论问题。

5 代　数

在巴比伦的泥板中已有二次方程的记录，公元前 18 世纪巴比伦人就讨论过二次方程。

古希腊的阿基米德研究过一元三次方程

$$x^3+a=cx^2$$

的解法。

公元 3 世纪中国数学家赵爽给出了一元二次方程 $-x^2+kx=A$ 一个根的公式

$$x=\frac{1}{2}(k-\sqrt{k^2-4A})$$

9 世纪，阿拉伯数学家花拉子米建立了一元二次方程的求根公式。

花拉子米（783—850）生于波斯北部花拉子模，卒于巴格达。813 年在巴格达领导“智慧馆”的工作，数学上花拉子米有两部名著传世：820 年出版的《代数学》（直译为《还原与对消的科学》）和《印度的计算术》。在《代数学》中，首次给出一元二次方程的求根公式，且给出几何的证明，强调判别式非负才有实根。该书在欧洲作为教科书使用了几个世纪，对欧洲数学的发展起了巨大的作用。在《印度的计算术》一书中，介绍了十进制记数法和四则运算技术，现在所称的阿拉伯数字 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 源于印度，经花拉子米等人介绍到欧洲，欧洲人误称为阿拉伯数字（因花拉子米等是阿拉伯人）。

到 15 世纪人们还误认为求三次与四次方程的根如同化圆为

方一样地难解。

1515 年，意大利数学教授费罗(S. Ferro，1465—1526)发现三次方程 $x^3+mx=n(m,n>0)$ 的代数解法。当时意大利数学界有一种不良习气，不公开自己的科研成果。费罗把自己的结果秘密地传给他的学生费奥(A.M.Fior)。

1535 年，意大利另一数学家塔塔利亚(Niccolo Fontana，1499—1551)，Fontana 的绰号叫做“塔塔利亚”(Tartaglia，口吃)，塔塔利亚也宣称得到了方程 $x^3+mx=n$ 的解法。费罗对塔塔利亚的宣称信不过而提出挑战。各自给对方出 30 道三次方程的计算题，比赛在米兰大教堂公开进行。结果塔塔利亚迅速求得费奥提交的 30 道形如

$$x^3+mx^2=n,\ x^3+mx=n(m,n>0)$$

方程的根，而费奥只能解形如 $x^3+mx=n$ 的方程，塔塔利亚获胜。但塔塔利亚对于求解公式仍然守口如瓶。在米兰行医和教书的学者卡尔丹(G. Cardano，1501—1576)向塔塔利亚再三求教，发誓对其解法绝对保密，于是塔塔利亚把三次方程的解法告诉了卡尔丹。不久，卡尔丹不顾自己向塔塔利亚的承诺，在他 1545 年出版的著作《数学大典》中公布了塔塔利亚的解法：

$$x^3+px=q(p,q>0)$$

的解为　$x=a-b$，其中

$$a=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},\quad b=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{5.5}$$

后人称式(5.5)为卡尔丹公式。

考虑恒等式

$$(a-b)^3+3ab(a-b)=a^3-b^3$$

令 $3ab=p,a^3-b^3=q$，则可解得式(5.5)。

后来卡尔丹又得出

$$a=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}},\quad b=\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

(5.6)

有二次项的三次方程,可以化成上述卡尔丹能解的形式。

1540年,意大利数学家达科伊(T. da Coi)向卡尔丹提出求四次方程根的问题.由卡尔丹的学生费拉里(L. Ferrari,1522—1565)解决,其求根公式也被卡尔丹写入《数学大典》一书。对于一般的四次方程

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

化成不含(令 $x=y+a$)三次项的方程

$$y^4+py^2+qy+r=0$$

对于变量 z 有

$$(y^2+p+z)^2=$$

$$(p+2z)y^2-qy+(p^2-r+2pz+z^2) \tag{5.7}$$

右端是对于 y 的二次三项式,令 z 满足

$$q^2-4(p+2z)(p^2-r+2pz+z^2)=0 \tag{5.8}$$

则右端可配成完全平方,式(5.8)是关于 z 的三次方程,卡尔丹已有公式求取式(5.8)的根 z,用此 z 的值代入式(5.7),再两边开方,得关于 y 的两个二次方程,再求 y。

卡尔丹在《数学大典》一书中已注明三次方程的解法公式是塔塔利亚给出的;塔塔利亚并未给出其公式的证明,证明是卡尔丹在《数学大典》一书中给出的。卡尔丹对于公式中 $\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3<0$ 的情形有所注意,他已经觉察到复根问题和复根要成对出现。

卡尔丹还提出三次方程有3个根,四次方程有4个根的结论,可惜他未给出证明。

卡尔丹是数学史上的怪杰之一,他兼无赖与学者的气质于一

是："天赋聪慧，既有才华闪烁的想象力，又能刻苦治学；既是雄辩家，又是一位多才多艺的学者；既是几何学家，又是代数学家；既是天文学家，又是星象家；既是医学家，又是外科圣手；既是语言学家，又是博学家。"

卡尔丹生于意大利的帕维亚市，他的生平之中，誉毁兼备。卡尔丹在自传《我的生平》中说，他是米兰一位律师的私生子，母亲是缺乏文化教养而性情暴躁的寡妇。卡尔丹的童年十分悲苦

常受父母虐待和旁人的歧视。1520 年，卡尔丹考入帕维亚大学学医，1526 年获医学博士学位，但卡尔丹同时爱好数学，在数学方面成就斐然。1534 年去米兰大学任数学教授，于是卡尔丹一面搞数学教学科研，一面行医治病，首创斑疹伤寒的治疗方法，两方面都名声大噪，双获成功，不但是米兰的名医，而且又成了数学力学教授。

卡尔丹性格怪癖，行迹不轨，居才自负。1560 年，他一次发脾

气竟把亲生儿子的两只耳朵用手术刀割下，引起社会公愤，帕维亚大学只得割爱解聘了卡尔丹。1570 年，因亵渎耶稣圣名而入狱。一年后出狱，开始写《我的生平》，在此书中他宣称算出自己将于 1576 年 9 月 21 日去世，结果那天他真的死去了。据说这是卡尔丹为了保全自己星象家的声誉而自戮。

到一般情形且给出了公式的证明的功劳。其实卡尔丹并非剽窃，他在书中明确宣称该公式是塔塔利亚告诉他的。

卡尔丹在《数学大典》中说："我的朋友塔塔利亚享有如此优异的、绝妙的、超人的聪明和人类精神的全部才能的这样一种发现的荣誉。这一发现实在是天赋，这样卓越的公式是他天赋的智慧之力量，对他来说，真是任何目标都不能认为是不可能达到的。"

尽管卡尔丹公开了三次方程求根公式的发明权归塔塔利亚，但塔塔利亚对卡尔丹的失信仍耿耿于怀，公开了当时卡尔丹的欺骗经过：卡尔丹以某某贵族的署名给塔塔利亚写了信，约塔塔利亚在米兰教堂会面，塔塔利亚按时赴约，结果等候他的却是卡尔丹。卡尔丹巧言辞令，骗得口吃舌笨的塔塔利亚的信任，便把三次方程的求根公式用晦涩的一种口诀告诉了卡尔丹。

卡尔丹的女婿，数学家费拉里给塔塔利亚写信说卡尔丹已经在著作中公开了三次方程求根公式的发明权属于塔塔利亚。塔塔利亚公开那段不愉快的往事是恩将仇报，约塔塔利亚于 1548 年 8 月 10 日在米兰大教堂摆数学擂台。据说当日许多名流学者赴会，盛况空前，费拉里有一题难倒了塔塔利亚。

到 19 世纪，解 n 次代数方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

仍是代数研究中的中心课题。

1591 年，法国数学家韦达（Francis Vieta，1540—1603）发表了《分析术人门》，创设大量现代代数符号，被西方数学史称为"代数学之父"。

1615 年，韦达生前的著作《论方程的整理与修正》出版，该书中给出著名的韦达定理：

对于一元 n 次方程的 n 个根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，成立下列公式：

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_1}{a_0}, \ \sum_{i<j} x_ix_j = \frac{a_2}{a_0}, \ \sum_{i<j<k} x_ix_jx_k = -\frac{a_3}{a_0}, \cdots$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_1x_2\cdots x_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0}$$

同一时期牛顿与卡尔丹也得出过这些结果，但韦达并未给出严格证明，韦达定理的证明是在1799年高斯得出代数基本定理之后给出的。

韦达1560年毕业于普瓦捷大学法律系，任巴黎法院审查官和皇室律师，业余自修数学，成为数学史上杰出的数学家。在西班牙与法国的战争中，他用数学方法破译了西班牙的密码，西班牙宗教裁判所以韦达背叛上帝罪判处韦达焚死之极刑。1603年，韦达在巴黎去世。韦达是文艺复兴运动的积极分子，人本主义者，反对宗教教义和经院哲学。

韦达还给出数学史上第一个非几何地求 π 的解析式：

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{90^\circ}{2}\cos\frac{90^\circ}{4}\cos\frac{90^\circ}{8}\cdots = \prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{90^\circ}{2^n} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

由此算出 $\pi\in(3.1415926535, 3.1415926536)$。

代数基本定理是代数学的中心定理。

1629年，荷兰数学家吉拉尔在《代数新发现》一书中推测 n 次代数方程有 n 个根，但他未给出证明。

1742年，欧拉在与朋友的通信中断言，n 次实系数多项式可以在实数范围内分解成一次因式与二次因式之积，且给出了证明。

高斯于1799年、1814年—1815年、1816年、1848年—1850年分别给出代数基本定理4个证明。

18世纪之后，人们开始寻找五次方程的求根方法。1824年，挪威数学家阿贝尔发表著名论文《高于四次的一般方程的代数求解不可能性的证明》，首次证明五次方程不可能用根式求解。

在阿贝尔之前，1770年拉格朗日发表论文《关于代数方程解的思考》，讨论与总结数学史上二次、三次和四次方程的解法，拉格朗日发现次数低于五次的方程的解法不能推广到五次或高于五次的一般代数方程。他试图证明这件事，写了长达200多页的证明文章，但试证未获成功，拉格朗日感叹这个问题“好像是在向人类

的智慧挑战”。

阿贝尔(Abel Niels Hanrik,1802—1829),生于挪威的一个小岛,是数学史上罕见的才子,可惜事业坎坷!1824年,他把五次方程不可解性的论文寄给高斯,未得到高斯的重视。他在柏林著名杂志《纯粹与应用数学杂志》上发表了22篇重要论文,其中包括代数方程、无穷级数和椭圆函数等方面的创造性内容。数学家厄米特(C.Hermite)对他的工作评价说:“他的丰富思想可以使数学家忙碌500年。”

阿贝尔还研究了一类可用根式来求解的方程:一个 n 次方程的根为 $x_1,\theta_1(x_1),\theta_2(x_1),\cdots,\theta_{n-1}(x_1)$ 时,其中 $\theta_i(t)$ 是有理函数,则此方程可以用根式求解。这种方程后人称之为阿贝尔方程。

阿贝尔是椭圆函数的创始人之一。1826年春他去法国,把《关于很广一类超越函数的一个一般性质》的一篇关于椭圆函数的创造性论文交给法国科学院,先由柯西主审,因忙于自己的一项研究,柯西把阿贝尔的文章搁置起来。另一位审稿人勒让德竟把这篇论文忘记放到何处去了!阿贝尔在法国和德国找不到工作,1827年返回奥斯陆,由于事业不顺、奔波劳累而病魔缠身。在家乡他也没有找到工作,1829年4月6日,阿贝尔寂寞地离开了人世,亡年仅26岁,未婚。去世3天之后,阿贝尔的朋友克雷尔寄给阿贝尔一封信,内附柏林大学的聘书:

尊敬的阿贝尔先生:

本校聘请您为数学教授,望万勿推辞为幸。

柏林大学

椭圆函数的创始人之一雅可比读到阿贝尔关于椭圆函数的论文之后感慨地说:“这是我望尘莫及的。”雅可比向勒让德提出抗议,责备勒让德为什么扣压阿贝尔的关于椭圆函数的文章,勒让德找出阿贝尔的文章细读后给雅可比回信说:“我很满意地看到两个年轻数学家如此成功地开辟了分析的一个分支。”之后勒让德著文介绍阿贝尔和雅可比的工作成就。

1830年,法国科学院把大奖同时授予阿贝尔和雅可比。1841年,阿贝尔在15年前交给法国科学院的那篇论文《关于很广一类超越函数的一个一般性质》出版。

阿贝尔的工作指出高于四次的代数方程根式解一般而言是不存在的,但一些特殊的高次方程可以有根式解,例如阿贝尔方程。法国年青数学家伽罗瓦(E. Galois,1811—1832)考虑了这样的问题:什么样的方程可用根式来解? 1829年—1831年,伽罗瓦完成了几篇代数学史上划时代的论文,给出高次方程可用根式求解的充分必要条件。在这些工作中,尤其重要的是给出了"群"的概念,使代数学得到新生,从此代数在对象、内容和方法上都发生了深刻的变革,为20世纪代数结构观念的产生奠定了基础,而且群论已成为晶体结构、基本粒子与量子力学等现代物理的重要研究工具。

伽罗瓦生于法国巴黎远郊的布拉林,父亲忠厚、聪敏,富有自由主义思想,曾任布拉林市长。

1829年,法国科学院讨论伽罗瓦的论文,决定由柯西主审,柯西要求伽罗瓦写一个详细的第二稿,伽罗瓦按要求写了。1830年,第二稿由傅里叶主审,不久傅里叶去世,论文下落不明。伽罗瓦向科学院追问,科学院要求伽罗瓦重写,伽重写后由泊松审稿,泊松没有看懂就把伽罗瓦的文章否定了。

1829年,伽罗瓦因参加反政府的游行而被他就读的高等师范学校开除。1831年5月,在一次宴会上,他一手举刀一手举杯为新上任即行暴政的路易·腓立普国王"干杯",第二天以煽动谋杀国王罪被捕入狱,后因证据不足和共和党人的辩护而获释。1831年7月14日,伽罗瓦率众上街游行,再次被捕,判刑9个月,关押在圣佩拉吉监狱。在狱中,他继续研究群论,搞出了正规子群、群同构、单群与合成群等新成果,还研究和推广了阿贝尔的椭圆积分,并把这些成果写成论文。

1832年3月,伽罗瓦染上霍乱,送医院监护就医,与院长的女儿相恋.1832年4月29日获释。可恨此女对伽情有不忠,伽罗瓦与第三者决斗,腹部中弹身亡,世俗无情地葬送了21岁的天才数

学家,实为数学界的巨大损失。

伽罗瓦在决斗前的遗嘱中写道:“我在分析方面做出的一些新发现,有些是关于代数方程论的,有些是关于整函数的,可以公开请求雅可比或高斯,不是对于这些定理的正确性而是对于它的重要性发表意见,以后我希望有些人将会发现,把这些东西注解出来是有益的。”

他的朋友把伽罗瓦的遗稿发表在《百科评论》上。1843 年,刘维尔整理伽罗瓦的遗作。1848 年,刘维尔写了序言在《纯粹与应用数学杂志》上发表了伽罗瓦的《论方程的根式可解性条件》这一里程碑式的论文,论文中给出伽罗瓦群等重要概念。

1852 年,意大利数学家贝蒂(E. Betti)全面介绍伽罗瓦关于代数方程不可解理论。1870 年,法国数学家若当(M.E.C.Jordan)根据伽罗瓦的思想写出名著《论置换与代数方程》,系统论述伽罗瓦理论。

1858 年戴德金和 1870 年克罗内克分别独立地给出有限群与有限交换群的定义。1878 年凯莱发表了有限抽象群的研究成果,这是继阿贝尔群和伽罗瓦群之后的第二批对群论的开创性研究。

1872 年左右,C.F.克莱因和庞加莱开始研究无限群。1870 年左右挪威数学家李(Sophus Lie,1842—1899)开始研究连续变换群,1874 年李建立连续群的一般理论,并在此基础上建立了李代数,这些成果是群论历史上的第三批开创性工作。

从 19 世纪 80 年代到 20 世纪初,许多数学家对群论建立公理系统,其中美国的亨廷顿、穆尔和迪克森等人给出的群的公理系统沿用至今。

1854 年,英国数学家凯莱证明,任何有限群可以用一个置换群来表示,开创了群表示论的工作。1878 年,若当给出置换群的线性组合表示法。到 20 世纪初,弗罗贝尼乌斯和伯恩赛德把这一线性表示法推广到有限抽象群。1905 年,伯恩赛德得到群表示论的进一步的成果,群表示论成了群论的重要分支和得力工具。

1916 年,苏联数学家施密特出版名著《抽象群论》,是无限群

论的代表性著作。

19世纪末,戴德金在研究代数数时引入了环的概念。环的系统理论由德国女数学家E.诺特于1926年基本确立,她的工作是抽象代数形成的标志,且由此形成交换代数的新分支,交换代数主要研究交换环,参加交换代数创建工作的还有希尔伯特、克鲁尔、格罗唐迪克和德利涅等人。

域论是19世纪出现的新理论,始于阿贝尔和伽罗瓦的关于高次方程可解性的研究。戴德金和克罗内克在关于代数数的研究当中引入域的定义,可交换的除环为域。19世纪已提出有理数域、实数域、复数域、代数数域和有理函数域的理论。1893年,德国数学家韦伯对域进行了抽象研究,德国数学家施泰尼茨在韦伯工作的基础上于1910年发表了《域的代数理论》的综合性论文。

线性代数的历史很久远。线性方程组在中国的《九章算术》中频频出现,西方则是17世纪由莱布尼兹开始系统研究的,18世纪上半叶马克劳林和克莱姆得到了现称克莱姆法则的线性方程组的解法。18世纪60年代,法国数学家贝祖证明了 n 元齐次线性方程组有非零解的充要条件是系数行列式为零。

行列式是莱布尼兹首先提出的一个重要的数学概念。对行列式的理论进行系统研究的第一人是范德蒙(Vandermonde)。1772年,他给出计算行列式的余子式方法,同年,拉普拉斯推广了范德蒙的方法,形成现今的用代数余子式计算行列式的法则。"行列式"一词最早出现在柯西的著作中,用两条竖线夹着一个数字方阵来表示行列式是1841年凯莱首次使用。

柯西对行列式进行了系统的研究,1815年他建立了行列式的乘法定理和行列式的性质,与凯莱一起发展了行列式的理论。

德国数学家雅可比(Jacobi,1804—1851)首先研究了函数行列式理论,且给出函数行列式的导数公式,把函数行列式用于重积分的变量代换之中。行列式已成为现代数学不可或缺的得力工具。

矩阵是数学史上极重要的创造。1801年,高斯首先写出现代矩阵的表示法;1841年—1852年,艾森斯坦进一步研究了矩阵的

理论。“矩阵”一词是1850年西尔维斯特首先使用的。

1855年以后,凯莱发表了一系列关于矩阵的研究成果,引入了一些有关的定义,例如矩阵相等、零矩阵、单位矩阵、矩阵的和与积、逆矩阵、转置矩阵、对称矩阵等,且用行列式定义了矩阵的特征方程与特征根。1858年,凯莱得到一个漂亮的定理:任何方阵都满足它的特征方程。由于凯莱的出色工作,一般认为凯莱是矩阵理论的创始人。

1879年,德国数学家弗罗贝尼乌斯(Frobenius)引入矩阵秩的概念,英国数学家史密斯(H.J.S.Smith,1826—1883)引入增广矩阵的概念,证明了 n 个未知数 m 个方程的方程组相容的充分必要条件是其增广矩阵与非增广矩阵的秩相等。

第六章　函数论、变分法与泛函分析

函数论，这一最丰饶的数学分支，乃数学的享受，被欢呼为抽象科学中最和谐的理论之一。

——M.克莱因

1　复变函数论

1545年，卡尔丹在《数学大典》中引用塔塔利亚的三次方程求根公式时，需要计算

$$a=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}},\quad b=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

他已经遇到了$\left(\frac{q}{2}\right)^2<\left(\frac{p}{3}\right)^3$的麻烦，他在求$x(10-x)=40$的根时，得出$x=5\pm\sqrt{-15}$，卡尔丹说："对这种量进行运算时，一方面觉得结果令人满足，不管有多大的良心责备，我也会说$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})=40$这个等式成立，算术就是这样神妙。"但卡尔丹又觉得有点"矫揉造作"，甚至他"感到道德上的折磨"。卡尔丹是敢于对负数开平方这种数进行运算的第一人，卡尔丹把这种量称为"诡辩量"。

1637年，笛卡儿在《几何学》中提出"虚数"这一名词与实数相对。

1751年，欧拉对复数$x+\mathrm{i}y$取了对数：

$$\ln(x+\mathrm{i}y)=\ln\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=\ln\rho+\mathrm{i}(\varphi\pm2n\pi),n=1,2,\cdots\quad(6.1)$$

其中$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，φ是点(x,y)的向径与x轴夹角。

此前,欧拉已给出被克莱因称之为数学中最卓越的公式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,\ e^{i\pi}+1=0$$

1797 年,挪威自学出身的测量员韦塞尔(C. Wessel, 1745—1818)写了一篇名为《关于方向的分析表示:一个尝试》的论文,刊载于丹麦皇家科学院 1799 年的论文集中,对复数 $a+b\sqrt{-1}$做了几何解释。在韦塞尔的论文中,除了 x 轴及其实单位 1 之外,他引入了"虚轴"的概念,虚轴以$\sqrt{-1}$做单位,从原点 O 到平面上一点 P 的向量OP 用复数$a+b\sqrt{-1}$表示,其中(a,b)是 P 的笛卡儿坐标。同时他定义了今日我们学习的向量 $a+b\sqrt{-1}$ 与 $c+d\sqrt{-1}$的四则运算。1897 年,韦塞尔的论文译成法文,引起数学界的重视和接受。

1801 年,高斯用 i 表示$\sqrt{-1}$,把复数 $a+b\sqrt{-1}$写成 $a+ib$,且干脆把 $a+ib$ 与(a,b)视为一件事。

虚数与复数的出现,犹如古希腊人引入无理数一样,激起了数学界的一场混乱与纷争,虽然时间不长就平息了这场风波,没有形成如第一次数学危机那般巨大的冲突,但也颇耐人寻味。事实上,当时人们只觉得数无非是实数。另外,人们的思维定势(其实是一种"思维疾病")是"不可理解的东西就是不存在的事物,是假的"。只有像卡尔丹和莱布尼兹等那种极富革命性的数学家才敢于把虽不能理解但确实需要的、能起作用的东西引人运算中去。

1747 年,欧拉曾致函对负数取对数抱否定态度的达朗贝尔,阐明负数对数的含义,达朗贝尔仍不以为然,达朗贝尔专门写了一篇《负数的对数》,否定这种数的存在。于是欧拉在 1751 年对复数的对数给出了公式(6.1)加以澄清。后来达朗贝尔终于接受了复数,且对复变函数论做出了大贡献。

1752 年,达朗贝尔研究流体力学时,起用了复变函数

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y),\quad z=x+iy$$

且讨论 $f(z)$的导数,他的结论是:若 $f(z)$在 z 点可导,则

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} &= -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

方程组(6.2)称为达朗贝尔—欧拉条件或柯西—黎曼方程。1814年,柯西证明方程组(6.2)是可微函数 $f(z)$解析的充分必要条件。

复变函数的积分是函数论中的重头戏。

1811 年,高斯给贝塞尔(Bessel)的信中提出如下问题:

"在 $\int \varphi(x)\mathrm{d}x$ 中,当下限为 0,上限是 $a+ib$ 时,意义是什么?显然,如果要求有清楚的概念,那就必须假定 x 取小的增量,然后把从零到 $a+ib$ 所有的$\varphi(x)\mathrm{d}x$ 加起来。"

1814 年,柯西《关于定积分理论的报告》在巴黎科学院宣读。1925 年,柯西写出另一篇关于复变积分的论文《关于积分限为虚数的定积分的报告》,这篇文章被认为是柯西最重要的论文,是科学史上最瑰丽的篇章之一。在这一文章中,柯西把

$$\int_{x_0+iy_0}^{X+iY} f(z)\mathrm{d}z$$

定义为积分和

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} f(x_\nu + iy_\nu)[(x_{\nu+1} - x_\nu) + i(y_{\nu+1} - y_\nu)]$$

的极限,其中 $x_0, x_1, \cdots, X$ 及 $y_0, y_1, \cdots, Y$ 是沿(x_0, y_0)到(X, Y)的路径的分划点的横坐标与纵坐标。且得到柯西定理:

单连通区域内的解析函数 $f(z)$沿区域内任一逐段光滑曲线 C 的积分与曲线的起止点有关,而与 C 的曲直长短无关,于是有公式

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z = F(z)$$

1831 年,柯西证明了下面的柯西积分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

其中 Γ 是简单闭曲线，Γ 所围的区域为 D，$f(z)$在 D 内解析，$\bar{D}$ 上连续。

对于不连续的函数，柯西于 1825 年建立了留数的概念，且指出如果积分闭路径包围着一些极点，则积分值是这些极点上留数和的 $2\pi i$ 倍，即

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i E[f(z)]$$

其中 $E[f(z)]$ 是 C 内各极点留数之和。

自 1821 年起的 25 年左右的时间里，几乎是柯西独自一人在开发复变函数理论，为复变函数论的发展奠定了基础。

1843 年，法国数学家洛朗(P. A. Laurent，1813—1854)证明，当一个函数在一个孤立点 a 上不连续时，必须用自变量升幂与降幂的展开式来代替泰勒级数。洛朗的展开式是

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

其中 $f(z)$在环域 $D: 0 < r < |z-a| < R$ 内解析，a_n 的值为

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}$$

其中 Γ 是中心在 a 的环域 D 内一圆周。

这一结果外尔斯特拉斯也独立得出，但未发表。

1844 年，柯西证明了一条精彩定理：

每个有界整函数是常数。

1847 年，刘维尔发表了这一结果。

当柯西用解析表达式研究复变函数的微分与积分的时候，外尔斯特拉斯正在另一条途径上研究复变函数，他在幂级数的基础上讨论复变函数，建立解析开拓的理论与方法，且建立了保形变换的理论。

1851 年，黎曼在其博士论文《单复变函数的一般理论基础》中引入黎曼曲面的概念，开辟了多值函数的研究方向，奠定复变函数论的几何基础。

外尔斯特拉斯的许多工作并未及时发表,他不关心发现的优先权问题,当他在19世纪90年代出版他的《著作集》时,其中的很多成果已被他人抢先发表过了。

外尔斯特拉斯的解析开拓是如下进行的:

一个在 a 为圆心 r 为半径的圆 C 内收敛的 $z-a$ 的幂级数,代表一个函数 $f(z)$,它在圆 C 内每一点解析。在圆内选一点 b 并利用原始级数给出的函数值及各阶导数,得到 $z-b$ 的一个新的幂级数,它的收敛圆是 C',C' 与 C 交不空;在 $C'\cap C$ 内两个级数给出的函数值一致,在 C' 处于 C 外的点上,称第二个级数的值是第一个级数定义的函数的一个解析开拓,再尽可能地继续下去,从 C' 开拓到其他的圆,得到 $f(z)$ 的全部解析开拓。在解析开拓的过程中,一个新圆也许可能覆盖圆链中不直接在它前面的一个圆的一部分,并且这个新圆与前方那个圆的公共部分中函数值不一致,这时函数便是多值的。

外尔斯特拉斯给出一个例子,它的收敛圆是它的自然边界,即此圆周是此函数的奇点曲线。这个函数是

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n!}$$

这个函数已无法再进行解析开拓。

黎曼(G.F.B.Riemann,1826—1866)对多值函数进行了几何研究,给出黎曼曲面的概念。他首先研究了函数 $w^2=z$,对每个 z 值,w 有两个值;黎曼给 $w=\sqrt{z}$ 与 $w=-\sqrt{z}$ 每一支引入一个 z 值平面,他还在每个平面上引入一点对应于 ∞ 点,这两个平面在 O 点到 ∞ 点连接起来,当 z 沿上述两张平面的“上叶”绕原点变动,辐角由0变到 2π 时,$w=\sqrt{z}$ 只映入 w 值的复平面的辐角0到 π 的部分;让 z 通过实半轴进入下叶,这时 $w=-\sqrt{z}$,z 绕原点在下叶上辐角从 2π 转到 4π 时,w 的辐角由 π 变到 2π。这样,经 z 的绕原点的两个环行(在每叶上各绕行一次),我们得到函数 $w^2=z$ 的值 w 的全部,即 z 在两叶合成的所谓黎曼曲面上变动时,w 是 z 的单值函数。于是,关于单值函数的定理可以推广到多值函数。

黎曼定义单值解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 如下：

$f(z)$ 在一点及其邻域内连续可微，且满足柯西—黎曼方程（简称 C－R 方程）

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

从 C－R 方程可以推得 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 满足二维拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$$

黎曼 1826 年生于德国汉诺威一个农村，家境贫寒。14 岁入汉诺威文科中学，但他对数学十分偏爱。中学时代他借到了 A.M. 勒让德的大四开本 859 页的名著《数论》，6 天之后，黎曼归还了这本书，他日以继夜地研究，掌握了该书的内容，且对书中提到的素数问题十分感兴趣。他还阅读了欧拉的著作，很快掌握了微积分的内容。

1840 年春，黎曼入格丁根大学语言与神学专业，选修高斯的数学课。1847 年春，黎曼转学入柏林大学，受教于 C.雅可比、P.狄里克雷、J.斯泰纳、G.爱森斯坦等大数学家，且钻研柯西的著作。1851 年，黎曼在高斯的指导下，完成博士论文《单复变函数一般理论基础》，取得博士学位。高斯对黎曼论文的评语如下：

“黎曼先生提交的博士论文提供了可信的证据，说明作者对他的论文中所论述的主题的大部分所进行的分析是充分、完全和深入的，显示了一个具有创造性的、活跃的、真正的数学头脑以及了不起的富有成果的创造性。文章清楚、简洁，有的地方很漂亮，大多数读者将会喜欢，它不仅符合博士论文所要求的各项标准，而且远远超出。”

1854 年，为了取得格丁根大学无薪讲师的资格（即只收听课学生的学费而学校不发给薪金），要求黎曼在格丁根大学报告高斯指定的研究方向——几何学基础，黎曼为此写了《论作为几何基础的假设》的讲稿。高斯等名人听了黎曼的报告后评价黎曼的讲演是一个数学上的杰作，表述也极其典范。取得无薪讲师资格后，黎曼为 8 个学生主讲了“偏微分方程及其在物理学上的应用”的课

程，后来 R.戴德金也成了黎曼的学生。1859 年，黎曼当选柏林科学院院士。

黎曼 36 岁结婚，39 岁去世。

他一生著作不多，除了博士论文外，只发表过 10 篇论文。1876 年，由戴德金和韦伯主编的《黎曼全集》出版。

黎曼是对现代数学影响最大的数学家之一，他的研究领域是复变函数论、代数函数论、常微分方程解析理论、解析数论、实分析、积分理论、三角级数理论、微分几何和数学物理方程等，在以上几个领域他都有突破性贡献，触发了现代数学革命性的进展。

除了上面所说的黎曼曲面和柯西—黎曼方程之外，黎曼尚有许多出色工作。

黎曼证明且有效运用了下面的所谓狄利克雷原理：

若积分

$$\iint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

有极小值，则存在一个函数，使积分达到极小。

对于黎曼函数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$$

黎曼取 $s=\sigma+\mathrm{i}t$，他证明出：

(1) $\zeta(s)$是解析函数，且满足

$$\zeta(1-s)=2(2\pi)^{-s}\cos\frac{1}{2}s\pi\Gamma(s)\zeta(s)$$

(2) $\zeta(s)$在 $s=-2,-4,-6,\cdots$处有零点，且除了 s 的实部属于$[0,1]$的带状区域可能有复零点外，没有其他零点。

黎曼提出以下猜想：

(1) $\zeta(s)$有无穷个复零点，全部位于带形域 $0\leqslant\sigma\leqslant1$ 上。

(2) 设 $\zeta(s)$在矩形 $0\leqslant\sigma\leqslant1,0\leqslant t\leqslant T$ 上的零点个数是$N(T)$，则当 $T\to\infty$ 时，$N(T)$近似等于

$$\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}$$

(3) 令

$$\xi(s)=\frac{s(s-1)}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

ρ 是 $\xi(s)$ 的复根，则 $\sum\limits_{\rho}\frac{1}{|\rho|}$ 发散，$\sum\limits_{\rho}\frac{1}{|\rho|^2}$ 收敛，其中 $\sum\limits_{\rho}$ 表示对所有复根求和。

(4) $\xi(s)=\xi(0)\prod\limits_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)$。

(5) $\zeta(s)$ 所有复零点的实部皆 $\frac{1}{2}$。

(6) x 以内的素数个数为 $\pi(x)$，则

$$\prod(x)=\mathrm{li}(x)-\sum_{\rho}\mathrm{li}(x^{\rho})+\int_{x}^{\infty}\frac{1}{u^2-1}\frac{\mathrm{d}u}{u\log u}+\text{常数}$$

其中

$$\prod(x)=\pi(x)+\frac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{3}\pi(x^{\frac{1}{3}})+\cdots$$

$$\mathrm{li}(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{0}^{1-\varepsilon}+\int_{1+\varepsilon}^{x}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\log u}$$

黎曼函数 $\zeta(s)$ 在解析数论中处于中心地位。

黎曼定义了黎曼可积性，把可积函数从连续函数扩大到有限区域内有无穷个间断点的函数，给出了可积的充分必要条件：

令

$$S=M_1\Delta x_1+\cdots+M_n\Delta x_n$$

$$s=m_1\Delta x_1+\cdots+m_n\Delta x_n$$

M_i 与 m_i 分别是区间 Δx_i 上 $f(x)$ 的最大值与最小值，记 $D_i=M_i-m_i$，则 $f(x)$ 黎曼可积的充要条件是对 Δx_i 的一切选法，

$$\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}D_i\Delta x_i=0$$

1860 年黎曼巧妙地给出一个处处不可微的连续函数的例子：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^2 x}{n^2}$$

黎曼记(x)表示 x 与它最接近的整数之差，当 x 是两整数中

点时，令$(x)=0$，因此$-\frac{1}{2}<(x)<\frac{1}{2}$，黎曼定义

$$f(x)=\frac{(x)}{1}+\frac{(x)}{4}+\frac{(x)}{9}+\cdots$$

黎曼证明$f(x)$对一切x值收敛，且$f(x)$是可积函数，又

$$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x$$

对一切x连续，但$F(x)$在$f(x)$间断点上不可导。

黎曼对几何学与物理学亦有大贡献，他把三维欧氏空间推广成n维空间，给出n维流形的概念，彻底革新了人们的空间观念与几何观念。他除数学之外，还对物理有浓厚兴趣，致力于研究热学、声学、电学、磁学和光学，他的《耳的力学》发表在医学杂志上。

复变函数论中一个极其重要的内容是所谓保角映射的理论与方法。

1768年，欧拉设计了一种从平面到平面的保角映射的方法。1825年，高斯解决了保角映射的一般问题。1851年，黎曼在他的博士论文中证明解析函数$w=f(z)$可以建立从z平面到w平面的保角映射，且给出保角映射的基本理论——黎曼映射定理，并把它推广到黎曼曲面。

黎曼映射定理说：设在复变数z与w的平面上分别给出简单闭曲线Γ_1与Γ_2，它们分别是区域D_1与D_2的边界，则存在解析函数

$$w=f(z)$$

它引出由D_1到D_2的单值保角映射；且若Γ_1与Γ_2只有有限个角点，则映射还可以扩张到边界上去。如果O_1，O_2分别是D_1，D_2内指定的点，M_1与M_2分别是Γ_1与Γ_2上的指定点，且要求$f(O_1)=O_2$，$f(M_1)=M_2$，则$f(z)$是唯一的。

保角映射的理论与方法有重要的应用。20世纪，俄国茹科夫斯基把此理论与方法成功地应用于飞机机翼设计中，研究机翼的截面和升力。

19世纪末20世纪初，法国大数学家庞加莱等人开始研究多个复

变量的全纯函数的性质,标志着多复变函数论的创立。到20世纪30年代,由于法国数学家嘉当(H.Cartan,1904—)等人的出色工作,而使多复变初步繁荣。H.嘉当是著名数学家E.嘉当的儿子,1967年—1970年,H.嘉当任国际数学联合会会长,他是布尔巴基学派的代表人物之一。20世纪50年,他把单复变函数论中的一些重要结果推广到多复变函数的情形,1980年获沃尔夫奖。1985年H.嘉当应邀来上海参加中国数学会成立50周年大会,并做了学术报告。

20世纪50年代日本数学家冈洁对多复变函数做出一系列杰出成果,使多复变函数论进入黄金时代。20世纪50年代之后,塞尔伯格、朗兰兹、盖尔芳德等人揭示了多复变函数论与代数数论、李群、代数几何等现代数学分支的内在联系,使多复变函数论成为极为活跃的现代数学分支之一。

2 实变函数论

微积分研究自变量与函数值皆实数的函数,由于康托儿和戴德金等人的集合论思想与实数理论的参与,数学分析中发现了不少奇怪的数学现象,促使数学家必须深入研究实变量的函数的性质和新的积分理论。于是在19世纪,形成了一门重要的数学分支——实变函数论。

例如19世纪狄利克雷给出著名的狄利克雷函数

$$\chi(x)=\begin{cases}1, x \text{ 为有理数}\\0, x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

1875年,外尔斯特拉斯构造了一个处处无切线的连续函数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n\cos(b^n\pi t)$$

其中 $0<a<1, ab<1+\frac{3}{2}\pi, b$ 为奇数。

1890年,皮亚拿构造了一个填满正方形的若当曲线(后经希尔伯特简化):

把单位正方形 $Q\{0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$ 划分成 4 个全等的所谓一级正方形，同时把 $t\in[0,1]$ 划分成 4 个等长的一级小区间，使这些一级正方形与 4 个长 $\frac{1}{4}$ 的闭区间一一对应。具体对应关系是依正向依次历经这 4 个小区间时，沿图中折线走遍一级正方形形成一条哈密顿轨（每个小正方形中心为顶点，相邻正方形对应的中心为邻顶的图（Graph）上的哈密顿轨），见图 6.1。

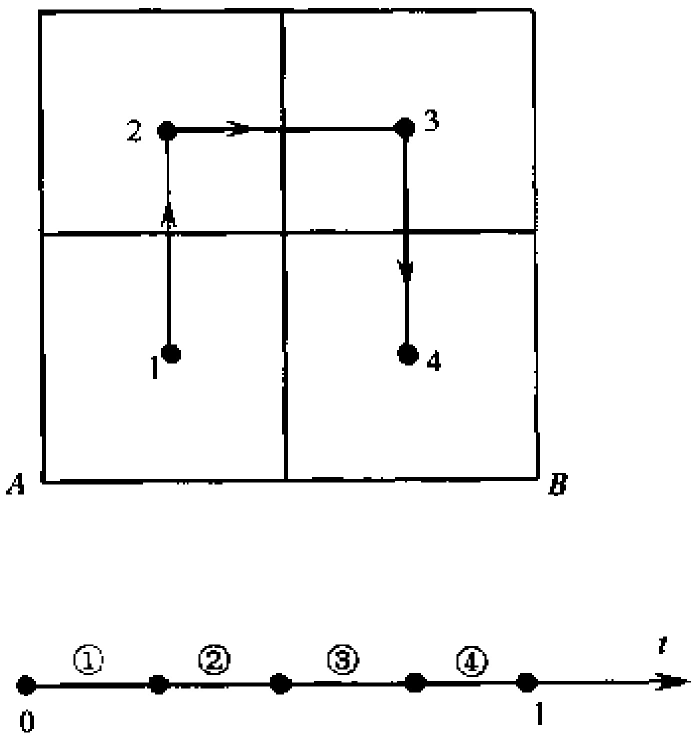


图 6.1

把每个一级正方形划分成 4 个二级全等正方形，把每个一级区间划分成等长的 4 个二级区间，使这些二级区间与二级正方形一一对应，见图 6.2。当在 t 轴上从 0 到 1 依次走过 16 个小区间时，在正方形上按标出的哈密顿轨行进行遍所有的二级正方形（先行遍一级 1 号正方形中的 4 个二级正方形，再进入一级 2 号正方形，行遍一级 2 号正方形内的二级正方形后再进入一级 3 号正方形，行遍其二级正方形后，最后进入一级 4 号正方形，且行遍其二级正方形）。

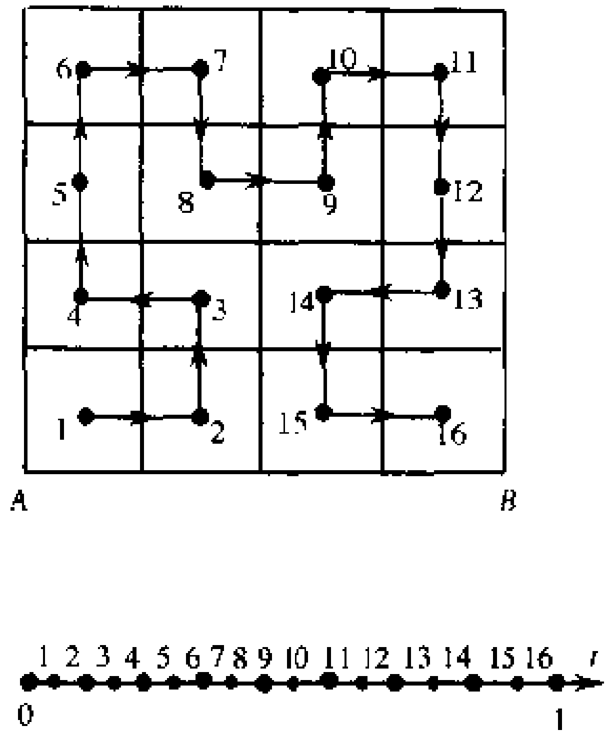


图6.2

依次类推，产生n级正方形与n级区间，图6.3画的是$n=3$

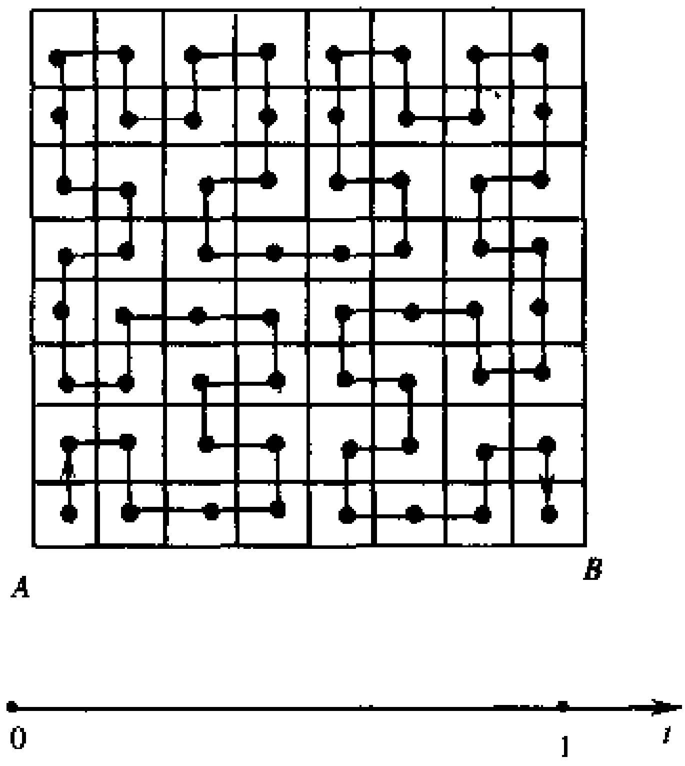


图6.3

的情形。

令 $n\to+\infty$，得一曲线 L，L 填满正方形 Q。

事实上，$\forall t\in[0,1]$，t 落在某个一级闭区间 $\sigma^{(1)}$ 上，同时 t 落在某个二级闭区间 $\sigma^{(2)}$ 上，且 $\sigma^{(1)}\supset\sigma^{(2)}$，依次得一个区间套

$$\sigma^{(1)}\supset\sigma^{(2)}\supset\sigma^{(3)}\supset\cdots\supset\sigma^{(n)}\supset\cdots$$

$$t\in\bigcap_{i=1}^{\infty}\sigma^{(i)}$$

$\sigma^{(i)}$ 与 i 级正方形 $Q^{(i)}$ 对应，则有

$$Q^{(1)}\supset Q^{(2)}\supset Q^{(3)}\supset\cdots\supset Q^{(n)}\supset\cdots$$

$Q^{(i)}$ 的直径是 $Q^{(i-1)}$ 的直径之半。所以存在一点 $(x,y)\in Q$，且 $(x,y)\in\bigcap_{i=1}^{\infty}Q^{(i)}$，即得

$\forall t\in[0,1]$，存在唯一的点 $(x,y)\in Q$，于是形成函数关系

$$L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t),t\in[0,1]\end{cases}\tag{6.3}$$

皮亚拿如下地证明了函数 6.3 是连续函数：

$\forall t_0\in[0,1]$，令 $t\to t_0$，则 t 与 t_0 可以同时落入同一个 n 级闭区间 σ^* 之上，即正方形上对应于 t 与 t_0 的两点 $M(\varphi(t),\psi(t))$ 与 $M_0(\varphi(t_0),\psi(t_0))$ 同时落入与上述 n 级闭区间 σ^* 对应的同一个 n 级正方形 Q^* 上。又 Q^* 的直径当 $n\to\infty$ 时趋于零，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}d(M_0,M)=0$，即 $\lim\limits_{t\to t_0}M=M_0$，亦即

$$\lim_{t\to t_0}\varphi(t)=\varphi(t_0),\ \lim_{t\to t_0}\psi(t)=\psi(t_0)$$

得证 $\varphi(t),\psi(t)\in C[0,1]$，此曲线是一条若当曲线。

下证 $\forall M_0(x_0,y_0)\in Q$，则 $(x_0,y_0)\in L$。

由于 $M_0\in Q$，M_0 至少属于 1 个（最多 4 个）第 n 级正方形 $Q^{(n)}$，$n=1,2,\cdots$，于是存在一个含 M_0 点的"正方形套"

$$Q^{(1)}\supset Q^{(2)}\supset\cdots\supset Q^{(n)}\supset\cdots$$

对应的闭区间套为

$$\sigma^{(1)}\supset\sigma^{(2)}\supset\cdots\supset\sigma^{(n)}\supset\cdots$$

当 $n\to\infty$ 时，$\sigma^{(n)}$ 的长度趋于零，故存在唯一的 $t_0\in[0,1]$，使得 $t_0\in\bigcap_{i=1}^{\infty}\sigma^{(i)}$，$t_0$ 与 M_0 对应，从而 $x_0=\varphi(t_0)$，$y_0=\psi(t_0)$，由 $M_0(x_0,y_0)$ 的任意性，Q 上点点在 L 上，L 填满了正方形 Q。

皮亚拿（Peano Giuseppe，1858—1932），意大利数学家，农民家庭出身，上小学时他每日要步行到 3 英里外的省城库内奥去读书。1876 年以优异成绩考入都灵大学，获奖学金入工程学系，两年后转修数学，毕业后即留校做教师。1890 年，任都灵大学教授，意大利皇家学会会员。他的最大贡献在分析数学和数理逻辑两个领域，是符号逻辑的奠基人之一，同时又是国际语的创造者。

1889 年，皮亚拿出版名著《算术原理新方法》，书中给出自然数公理，成为经典之作。

1900 年，皮亚拿是巴黎国际数学家大会主持人之一，数理逻辑学家罗素说："这次大会是我学术生涯的转折点，因为在这次大会上我遇到了皮亚拿。"

1891 年，皮亚拿创办《数学杂志》，他在该杂志上公布了他关于"数学公式"的庞大计划，期望把数理逻辑的概念应用于数学的每个分支，试图从他的逻辑符号和基本公理出发建立整个数学体系。在这项工作上他用了 26 年的时间，1895 年—1908 年，皮亚拿出版了《数学公式汇编》，书中收集数以千计的定理和公式以及丰富的文献资料，是一部"无尽的数学矿藏"。

皮亚拿自称自己的最重要工作在分析方面，1886 年他给出微分方程 $y'=f(x,y)$ 解存在的充分条件是 $f(x,y)$ 连续。1887 年，皮亚拿比 E. 比卡早一年发明了求微分方程解的逐次逼近法。

1893 年，皮亚拿出版《无穷小分析教程》，之后又编出《微分学与积分学原理》，这些书收入德国数学百科全书，公认为"自欧拉和柯西时代以来最重要的微积分教科书之一"。

在皮亚拿撰写的《数学百科全书》中，含有很多重要内容，例如微分中值定理的推广、隐函数存在定理及其可微性定理的证明、多变元函数泰勒展开的条件等。

1908年皮亚拿当选国际语协会主席。

皮亚拿还是一位优秀教师，1912年，他著文反对不合理的考试方法，认为"用考试来折磨可怜的学生，是对人性的犯罪，这也适合于中学和大学"。

皮亚拿的数学成果不但具有公理系统和逻辑严密性的纯数学风格，而且具体问题的提法与解法也独具特色，十分之新颖和巧妙。例如上面提到的填满正方形的曲线，以及微分方程求解的逐次逼近法等，都是数学史上令人叫绝的佳作。

1881年，德国数学家哈纳克等人提出"容量"的概念，推广了通常的长度、面积、体积的概念，随后皮亚拿提出区域或区间的内容量与外容量的概念，皮亚拿提出 $f(x)$ 构成的曲边梯形的区域之内、外容量分别由下、上积分确定。1893年若当完善了他的前辈关于容量的工作。1898年，勒伯格的老师波莱尔出版的名著《函数论讲义》中建立了测度理论和可测集的概念，证明了可数集测度为零的定理和有限覆盖定理。

1902年，法国数学家勒贝格在他的博士论文《积分、长度与面积》中，对于测度论与积分理论进行了深人研究，提出可测函数的概念与勒贝格积分的理论。

按黎曼意义上的积分，狄利克里函数 $\chi(x)$ 是不可积的，但是勒贝格认为这个函数取1的自变量（有理数）集的测度为零，对整个积分应无影响，这种病态函数应该也有积分。他发明了一种新积分，使得黎曼可积的函数在他的积分意义下仍可积，这种新积分使得可积函数的范围扩大，一些病态函数也变得可积了。

1904年，勒贝格写出名著《积分与原函数研究》，一种崭新的积分正式问世。

勒贝格的中心定义如下：

设 S 为区间 (a,b) 内任一有界点集，则把覆盖 S 的一组区间的长度之和的下确界称为 S 的外测度，$b-a$ 与 S 关于 (a,b) 的余集的外测度之差称为 S 的内测度，内外测度相等的集合称为可测集，这时它的外测度称为测度。记成 $m[S]$。

设函数 $f(x)$ 在可测集 S 上定义，c 是任意实数，若在 S 上 $f(x)\leqslant c$ 的一切点 x 构成可测集，则称 $f(x)$ 是 S 上的可测函数。

对于区间 (a,b) 内给定的有界可测函数 $f(x)$，在 $f(x)$ 的变化范围内插入分点

$$f(a)=y_0<\eta_1<y_1<\eta_2<\cdots<\eta_n<y_n=f(b) \qquad (6.4)$$

用 S_i 表示使 $y_{i-1}<f(x)<y_i$ 在 (a,b) 内的点 x 构成的集，若对每个分法(6.4)的序列 $\{y_i\}$，当 $\max\{y_i-y_{i-1}\}\to 0$ 时，$\sum_{i=1}^{n}\eta_i m[S_i]$ 趋于唯一的有限极限 I，则记成

$$I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

且称 I 为 $f(x)$ 在 (a,b) 内的勒贝格积分。

勒贝格还定义了无界函数与无界区间上的勒贝格积分。

黎曼可积的函数一定是勒贝格可积的，且两种积分值一致；反之不一定成立，例如 $\chi(x)$ 无黎曼积分，但它的勒贝格积分是零。

在勒贝格积分的基础上，重建了微积分基本定理，至此一门新兴的学科——实变函数论初步成形，勒贝格积分是实变函数论的核心内容。

病态函数的研究，尤其一些黎曼不可积的病态函数有了积分(勒贝格积分)值，这在数学史上也曾如无理数、复数一样，受到不少数学家的反对，例如庞加莱的老师埃米尔特在一封信中说："我怀着惊恐的心情对不可导函数的令人痛惜的祸害感到厌恶。"

勒贝格(Lebesgue Henri Léon，1875—1941)，生于法国博韦，出身于工人家庭，1894 年考入巴黎高等师范学校，1897 年毕业留校。在校图书馆工作两年，这两年他研读了波莱尔的《函数论讲义》和贝尔关于不连续函数理论，激起了勒贝格研究不连续的病态函数的热情。1902 年，勒贝格在南锡中学任教，且完成了博士论文。1902 年起任大学教师，1920 年任巴黎大学教授，1922 年当选法国科学院院士。勒贝格的主要功绩是改造和推广黎曼积分，克服黎曼积分的局限性，他形象地描述两种积分时说："我必须还人家一

笔钱，如果我从口袋里随意地摸出来各种面额的钞票，逐次地还债权人直到全部还清，这就是黎曼积分；不过我还有另外一种作法，就是把钱全部拿出来，并把相同面值的钞票放在一起，然后再一并付给应还的数目，这就是我的积分。”

由于勒贝格在实变函数方面的杰出贡献，伦敦、罗马、丹麦、比利时、罗马尼亚和波兰等地的科学院都聘他为院士。

由勒贝格积分为主的实变函数论为基础发展起来的分析数学称为现代分析，现代分析中的支柱学科是 20 世纪前 30 年形成的泛函分析。

3　变分法与泛函分析

1696 年 6 月，瑞士数学家约翰·伯努利（Jahann Bernoulli, 1667—1748）在《教师学报》上提出所谓“速降线”问题：

A, *B* 两点不在同一铅直直线上，*A* 点较高，求路径 *AMB*，使得动点 *M* 在自身重力作用下沿此路径由 *A* 下滑至 *B* 所耗时间最少。

约翰·伯努利用这一问题向同时代的所有数学家挑战，半年无人应战。1697 年元旦，约翰·伯努利以《公告》的形式再次向“全世界最有才能的数学家”挑战说：“众所周知，没有什么比提出困难而又有用的问题更能激发杰出的天才人物来为增长人类知识而工作了，通过也只能通过这类问题的解决，他们才能扬名于世，建立不朽的丰碑。”

“半年前，我曾在《莱比锡学报》（即《教师学报》）6 月刊上提出这样一个问题，它的优美、有用将为所有成功地致力于求解的人所公认。当时给几何学家们的期限是从公布之日起 6 个月。若到期无人能解，我将公布我本人的解答。现规定日期已过，却尚未出现获解的迹象，只有著名的莱布尼兹，他在高等几何领域理所当然地享有盛誉，曾写信给我说他很幸运地解决了这个他认为十分漂亮并且前所未闻的难题。”

“问题的意义是这样的：在连接两个给定点或从一点到另一点画的无限多条曲线当中，选择这样一条曲线，使用一条细线或狭槽来代替该曲线时，其上放置的小球被释放后，将以最短的时间从一

点滑到另一点。因为已不再有模糊之处，我热切地请求当代所有的几何学家都摩拳一试，运用他们珍藏的一切秘密武器，全力以赴攻克堡垒。愿他们很快赝获我们允诺的奖赏。当然这奖赏既不是黄金也不是白银，金银只能诱惑那些卑劣而容易收买的灵魂，对这些人我们绝不指望任何值得称赞和有益于科学的东西。相反，美德是她自身最需求的奖赏。名声是一种强有力的激励，因此我们提供的奖赏是由荣誉和赞美编织的桂冠，适合品格高尚的人士。"

"若过了复活节仍没有人能解决问题，我们就把自己的解答公诸于世，届时希望盖世无双的莱布尼兹允许宣布他本人的解答以及我们得到的并在很久前向他透露的结果。对于这些具有深刻背景的解答，几何学家若能加以研究，他们无疑会认识到普通几何的局限性。"

1697 年 1 月 29 日，牛顿获知伯努利的挑战，他用一个晚饭后的时间一举给出此问题的正确解答，并把结果匿名发表。伯努利看后惊呼："从这只锋利的爪子，我认出了雄狮。"同年春天，《教师学报》上发表了速降线问题的几个解答，它们的作者是莱布尼兹、洛比达、雅各布·伯努利和约翰·伯努利本人。

这些工作标志着一门新的数学分支——变分法的诞生。

约翰·伯努利的速降线问题化成如下的数学模型：

设 A 点为(x_1, y_1)，B 点为(x_2, y_2)，见图 6.4，则小球下降的速度为

$$v = \sqrt{2g(y - y_1)}$$

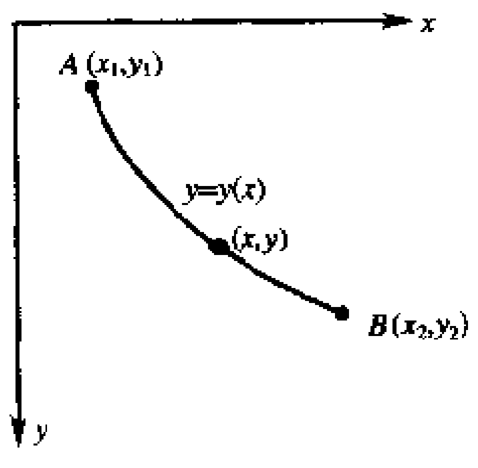


图 6.4

其中 g 是重力加速度,速降线的函数为 $y=y(x)$,沿 $y=y(x)$ 小球由 A 滑到 B 的时间为

$$T=\int_0^l \frac{\mathrm{d}s}{v}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{y(x)-y_1}}\mathrm{d}x$$

于是问题化成求使积分

$$T=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{\sqrt{y(x)-y_1}}\mathrm{d}x$$

取最小值的函数 $y(x)$。

1690 年,约翰·伯努利的哥哥雅各布·伯努利(Jacob Bernoulli,1654—1705)提出另一个优美的问题——悬链线问题:

求两点间柔顺悬链在自身重力作用下的形状。

不久雅各布·伯努利给出了悬链线的解答,且把其数学结论用于吊桥的设计,悬链线的解答促进了变分法的发展。

1744 年,欧拉发表《求某种具有极大或极小性质曲线或解最广义的等周问题的技巧》一文。

1761 年,拉格朗日发表《论确定不定积分式极大和极小值的一种新方法》。

欧拉和拉格朗日是变分法的奠基人。

欧拉和拉格朗日考虑的是

$$\int_{x_0}^{x_1}F(x,y(x),y'(x))\mathrm{d}x$$

取极值的问题,其中 $y(x)$是未知函数,F 与 $y(x)$皆有二阶连续导数,且满足 $y(x_0)=y_0,y(x_1)=y_1$ 的边条件。

拉格朗日(Joseph Louis Lagrange,1736—1813)生于意大利都灵,其父是商人,后破产而使家境衰落。拉格朗日回忆其家史时说多亏了父亲破产,不然自己也许做了投机商而无缘数学了。

拉格朗日喜欢文学,其父想让他学法律,17 岁时读到英国天文学家哈雷介绍牛顿微积分的文章《论分析方法的优点》而迷上了

数学分析，18 岁时，他独立地证明了积的求导公式

$$[u(x)v(x)]^{(n)} = u^{(n)}v^{(0)} + C_n^1 u^{(n-1)}v^{(1)} + \cdots + u^{(0)}v^{(n)}$$

拉格朗日写信给欧拉报告了他的发现，欧拉回信告知半个世纪之前此公式已由莱布尼兹建立。此事虽然有些唐突，但拉格朗日还是有些成就感，觉得自己有搞数学的才能。

拉格朗日 19 岁起研究变分法，1756 年把他研究的成果论文提交柏林科学院，是提出“变分法”这一术语的第一人。

1755 年，19 岁的拉格朗日被聘为都灵皇家炮兵学校的教授，20 岁任柏林科学院通讯院士。

1764 年，拉格朗日解决了关于月球为什么同一面永远对着地球的悬赏难题而获法国科学院奖。1766 年，拉格朗日解决了太阳、木星及其 4 个卫星之间摄动的所谓“六体问题”而获得法国科学院大奖。在拉格朗日的工作当中大量运用微分方程理论与方法。

1766 年，德国普鲁士王腓特烈大帝邀请拉格朗日到柏林任柏林科学院物理数学研究所所长。国王在邀请函中说：“欧洲最大之王希望欧洲最大的数学家在我的国家工作。”在柏林，他的主要工作在数论与代数方程方面。1766 年，他证明了贝尔方程 $x^2 - Ay^2 = 1$ 整数解的存在性，进面讨论了

$$x^2 - Ay^2 = B$$

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

的整数解问题。证明了任一正整数能表成 4 个整数平方和。1771 年，他证明了威尔逊定理。

在柏林工作期间，拉格朗日在天体力学上取得了丰硕的成果。1772 年，他的论文《论三体问题》与欧拉同时获奖。1774 年，《论月球的长期方程》与 1779 年《由对行星活动的试验来研究彗星的摄动理论》两项研究成果又获大奖。

在微分方程方面，拉格朗日首先研究了常微分方程的奇解，且研究了变系数线性方程和微分方程组。

1772 年—1779 年，拉格朗日研究线性与非线性一阶偏微分方程，提出把一阶偏微分方程化成常微分方程组的"拉格朗日方法"。

拉普拉斯评价拉格朗日时说："牛顿和拉格朗日是世界上对科学进展最有功绩的人，他们最高度地掌握了发现一般原理、发现科学实质的方法，这种方法能够对抽象理论做出罕见的最优美的说明，这就是拉格朗日的特点。"

1783 年拉格朗日任都灵科学院名誉院长，1787 年接受法国国王路易十六的邀请定居法国。在巴黎生活了 20 多年，他完成了伟大的经典著作《分析力学》。1795 年巴黎高等师范学校成立，1799 年，巴黎理工大学成立，拉格朗日兼任这两所著名大学的教授，培养了一大批世界第一流的科学家。

在巴黎期间，拉格朗日对他的数学研究进行了总结。1797 年，出版名著《解析函数论》，此书是函数论的起点。1801 年，出版《函数计算讲义》。

1813 年 4 月 10 日拉格朗日因病去世，他的故乡意大利和工作过的柏林与巴黎都举行了追悼仪式，拿破仑下令收集拉格朗日的论文，珍藏在巴黎科学院。

1736 年，欧拉对变分问题

$$\begin{cases}\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x \\ y(y_0) = y_0, y(x_1) = y_1\end{cases}$$

给出极值曲线 $y = y(x)$ 满足欧拉方程

$$F'_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F'_{y'} = 0,\ y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1$$

或写成

$$\begin{cases}F_{y'y'}y'' + F_{y'y}y' + F_{xy'} - F_y = 0 \\ y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1\end{cases} \tag{6.5}$$

方程组(6.5)是关于未知函数 $y(x)$ 的二阶常微分方程的边值问题。欧拉用方程(6.5)讨论了所谓极小旋转曲面问题：

$x \in [x_1, x_2]$,曲线 $y = y(x) \in C^2[x_1, x_2]$, $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$,欲使此曲线 $y = y(x)$绕 x 轴旋转所得的旋转曲面面积最小,求 $y(x) = ?$

由于绕 x 轴的旋转曲面面积为

$$S = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} \mathrm{d}x \tag{6.6}$$

在式(6.6)式中使 $S = S(y(x))$最小的 $y(x)$($y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$)即为所求。

满足欧拉方程边条件的二次连续可微函数称为容许函数。若 $y = y(x)$是容许函数,且使 $\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y'(x)) \mathrm{d}x$ 取极小值,则在容许函数集中,$y(x)$稍有扰动,即设

$$\eta(x) \in C^2[x_1, x_2], \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0, |\alpha| \ll 1$$

$$\bar{y}(x) = y(x) + \alpha\eta(x) \tag{6.7}$$

式(6.7)是以 α 为参数的容许函数族,所求的未知函数 $y(x)$是对应于 $\alpha = 0$ 的容许函数,把 $\bar{y}(x)$代入

$$S = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') \mathrm{d}x$$

得

$$S(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \bar{y}, \bar{y}') \mathrm{d}x =$$

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x) + \alpha\eta(x), y'(x) + \alpha\eta'(x)) \mathrm{d}x$$

于是 $S(\alpha)$在 $\alpha = 0$ 时取极小值,$S'(0) = 0$,即

$$S'(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \eta'(x) \right] \mathrm{d}x$$

$$S'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \eta'(x) \right] \mathrm{d}x = 0$$

分部积分得

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' \mathrm{d}x = \eta(x)\frac{\partial F}{\partial y'}\bigg|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\mathrm{d}x =$$

$$-\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\mathrm{d}x$$

于是

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\mathrm{d}x = 0$$

由 η 的任意性得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

此即证得欧拉方程成立。

当 F 中不显含 x 时，$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$，于是

$$0 = y'\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}y' - F\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'}y' - F = c \tag{6.8}$$

c 为任意常数。

具体到极小曲面问题，$F = 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}$，式(6.8)变为

$$2\pi y \frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} - 2\pi y\sqrt{1+(y')^2} = c$$

解得

$$c_1 y' = \sqrt{y^2 - c_1^2}$$

c_1 为常数，再分离变量积分之得

$$x = c_1\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2 - c_1^2}} = c_1 \ln\left[\frac{y + \sqrt{y - c_1^2}}{c_1}\right] + c_2$$

$$y = c_1 \mathrm{ch}\left(\frac{x - c_2}{c_1}\right) \tag{6.9}$$

c_1, c_2 为常数,由边条件 $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$ 得常数 c_1, c_2 应满足

$$\begin{cases} y_1 = c_1 \mathrm{ch}\left(\dfrac{x_1 - c_2}{c_1}\right) \\ y_2 = c_1 \mathrm{ch}\left(\dfrac{x_2 - c_2}{c_1}\right) \end{cases}$$

式(6.9)恰为悬链线。

用同样的办法,由欧拉方程可解得速降线恰为一条旋轮线。

变分法是泛函分析的源头之一,另一个源头是积分方程。事实上,在

$$S = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\mathrm{d}x$$

中,当 x_1, x_2 给定之后,S 的数值由函数 $y(x)$ 确定。不同的 $y(x)$ 可以确出不同的 S 值,可以写成 $S = S(y(x))$,但这里 $S = S(y(x))$ 不是一个一般的函数,而是由 $F(x, y(x), y'(x))$ 的积分确定的,是 $c^2[a, b]$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个映射。如果一定要沿用函数这个名称,则 $S(y(x))$ 是广义的函数,法国大数学家阿达玛首次称之为"泛函数",简称泛函。

阿达玛(Hadamard Jacques,1865—1963)于 1865 年 12 月 8 日生于法国凡尔赛,其父是拉丁文教授,母亲是钢琴师,阿达玛从小就有极好的拉丁文与音乐上的修养。阿达玛是到 20 世纪 50 年代为止,历史上仅有 5 位以第一名的成绩同时考取高等师范学校和综合工科学校的考生之一,他选择了高等师范学校就读。毕业后曾在巴黎大学、法兰西学院、综合工科学院、中央工艺与制造学院任教授,多年担任法国教育部督学。1892 年获博士学位,1912 年当选法国科学院院士,又是苏联、美国、英国、意大利科学院院士或皇家学会会员。1892 年和 1908 年,阿达玛因数学科学上的研究成果

两次获法国科学院大奖。

阿达玛是中国人民的好朋友。1936 年春，他受熊庆来教授之邀在清华大学讲学 3 个月。抗日战争中，阿达玛积极参与法国人民支援中国的抗日运动。阿达玛有 3 个儿子，两个儿子在第一次世界大战中牺牲，一个儿子在第二次世界大战中牺牲于北非，阿达玛因此获得“法国荣誉军团司令”的光荣称号。

阿达玛是 20 世纪以来，庞加莱之后少有的科学多面手，他的科研成果遍布解析函数、数论、级数、行列式、实变函数、集合论、变分法与泛函分析、积分方程、几何、拓扑、常微分方程、偏微分方程、水动力学、力学、概率、代数、逻辑、教育学和数学史等。1968 年，《阿达玛全集》出版。

1892 年，阿达玛的博士论文《泰勒展式所定义的函数的研究》讨论了收敛半径和奇点的位置与性质，与他的学生合著的《泰勒级数及其解析延拓》则已成为复变函数论的经典之作。他还研究了黎曼函数 $\zeta(s)$，使黎曼猜想获得重大进展，证明了素数定理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(n)\log n}{n}=1$$

其中 $\pi(n)$是不大于 n 的素数的个数，建立了解析数论的基础。

1910 年，阿达玛出版《变分学教程》，奠定了泛函分析的基础。

1932 年，阿达玛的名著《柯西问题和线性双曲型偏微分方程》是偏微分方程的经典作品。

1959 年，阿达玛的数学思想自传《数学领域中发明的心理学研究》出版，他强调既要重视推理的严格性，又要重视直觉，直觉能帮助发现问题和选择问题。

1964 年，阿达玛的最后一部著作《偏微分方程论》由我国科学出版社出版中文版，此书可称是偏微分方程经典理论的百科全书。

泛函分析是 20 世纪 30 年代形成的现代数学分支。1904 年—1910 年，希尔伯特发表了 6 篇文章，后来收录在他的名著《线性积分方程一般理论原理》一书中，他引入由无穷个有序实数组组成的集合 l^2，每个实数组 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)\in l^2$ 满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_i^2$$

皆有限数，且 $a,b\in l^2$ 时，定义了 a 与 b 的内积运算 (a,b) 为

$$(a,b)=\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$$

其中 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)$，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots)$，这样的集合 l^2 就构成一个所谓“希尔伯特空间”。这是数学史上第一个无穷维空间。后来希尔伯特的学生施密特(E. Schimidt)和诺依曼(J. V Neumann)等进一步把 l^2 的每个元素视为一个点或向量，且引人 $\|a\|$，定义

$$\|a\|=\sqrt{(a,a)}=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2}$$

$\|a\|$ 是三维欧氏空间中长度的推广，如果 $(a,b)=0$，则称 l^2 中两个无穷维向量 a 与 b 正交(垂直)。

施密特还研究了 l^2 中的向量组 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$，两两相异且正交，且长度 $\|e_i\|=1$，称此向量组为“标准正交系”，它显然是直角坐标系中三个坐标轴上单位向量的推广。

1907 年匈牙利数学家里斯(F. Riesz)和德国数学家费舍尔(E. Fischer)同时建立了 $L^2(a,b)$ 空间。他们把在区间 $[a,b]$ 上每个勒贝格平方可积函数称为一个“点”，在 L^2 中，$f(x)$ 的范数定义为 $\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的内积为 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$。他们得到 L^2 与 l^2 的等价关系(同构关系)。

1910 年，里斯把 l^2 与 L^2 推广到 l^p 与 L^p 空间，其中 p 是任意自然数，$L^p(a,b)$ 中的“点”是 $[a,b]$ 上 p 次幂可勒贝格积分的函数集合，定义了范数，$f(x)\in L^p(a,b)$，

$$\|f\|=\left[\int_a^b |f(t)|^p\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}$$

1922 年，波兰数学家巴拿赫提出比希尔伯特空间更一般的所

谓“巴拿赫空间”的概念,用范数 $\|\cdot\|$ 定义距离和收敛性,完备的线性赋范空间称为巴拿赫空间,且得到了深刻的巴拿赫压缩映射的不动点定理:

设 D 是巴拿赫空间 B 中非空闭集,T 是 D 到自身的映射,又 $\exists k \in \mathbb{R}$,$0 \leqslant k < 1$,对于任何 $\psi_1, \psi_2 \in D$,成立不等式

$$\| T(\psi_2) - T(\psi_1) \| \leqslant k \| \psi_2 - \psi_1 \|$$

则 D 中有 T 的唯一的不动点 ψ^*,即存在唯一的 $\psi^* \in D$,使得

$$T(\psi^*) = \psi^*$$

这个定理后来成了证明微分方程定解问题解的存在性的重要工具。

巴拿赫是现代泛函分析的奠基人之一。

1929 年—1932 年,伟大的美国数学家冯·诺依曼给出了希尔伯特空间的定义:完备的内积空间称为希尔伯特空间,希尔伯特空间为量子力学提供了数学基础,广泛地应用于积分方程、微分方程、数学物理等学科。

广义函数是泛函分析发展中的一朵奇葩。物理学家狄拉克(Dirac)为了物理模型之需要,硬是引入了一个当时颇遭微词的,使得数学家十分难堪的怪异函数

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases}$$

满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \mathrm{d}x = 1$$

狄拉克指出 $\delta(x)$的一个重要性质为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \varphi(x) \mathrm{d}x = \varphi(0)$$

其中 $\varphi(x)$为$(-\infty, +\infty)$上的连续函数。

作为一个物理学家,狄拉克自有他的道理,考虑一条无穷长的

杆子,沿此杆建立一维坐标系,点的坐标为 $x\in(-\infty,+\infty)$。在点 x 处,杆的密度为 $\rho(x)$,在 $(-\infty,x]$ 段,杆子的质量为 $m(x)$,则

$$\int_{-\infty}^{x}\rho(x)\mathrm{d}x = m(x)$$

设此无穷长的杆子总质量为 1,质量集中在 $x=x_0$ 点,则

$$m(x)=\begin{cases}1, x = x_0\\0, x < x_0\end{cases}$$

或写成　$m(x)=H(x-x_0)$,其中

$$H(x)=\begin{cases}1, x\geqslant 0\\0, x<0\end{cases}$$

对于质量集中分布的情形,则有

$$\rho(x) = \begin{cases}0, x \neq x_0\\+\infty, x = x_0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{x}\rho(x)\mathrm{d}x = H(x-x_0)$$

狄拉克的这些计算,从传统数学的观点来看,是不可接受的,一个函数除某点之外,处处取零值,不论在何种已有积分的意义下其积分也不是 1,$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1$ 不能成立!但是 δ 函数对于物理学而言却是如此之见效,使得物理学家正当地拒绝放弃它。不管当时数学家们都怎样嘲笑这种函数,但狄拉克及其合作者们在物理领域(例如量子力学上)却照用 $\delta(x)$,且收获颇丰,狄拉克应用过 $\delta(x)$ 的物理成果 1933 年获得诺贝尔奖金。当然,狄拉克也意识到 $\delta(x)$ 并不是通常的函数,至于找出什么理论来论证 $\delta(x)$ 这一符号的数学合法性,那就是数学家的任务了。1940 年,法国数学家许瓦兹严格证明了应用 $\delta(x)$ 的正确性,把 δ 函数置于坚实的数学基础之上,且由它引发了广义函数理论的创造,1950 年,许瓦兹获数学界最高奖菲尔兹奖。

许瓦兹(L. Schwartz, 1915—)是法国数学家，生于巴黎，1937年毕业于高等师范学校，1937年—1940年服兵役参加第二次世界大战，1943年获博士学位，1945年任南锡大学教授。1945年，许瓦兹建立了完整的广义函数论，在偏微分方程与概率论等领域亦有贡献。

许瓦兹把广义函数定义为某些具体的函数空间上的连续线性泛函，例如 $\delta(t)$ 是 $C[-N, +N]$ 上的线性连续泛函

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0) \quad \left(\int_{-N}^{N}\delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(0)\right)$$

$\forall\, \varphi(x) \in C[-N, N]$。

许瓦兹对 $\delta(x)$ 证明了下面的一些性质：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x - x_0)\mathrm{d}x = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x - x_0)f(x)\mathrm{d}x = f(x_0)$$

$$\frac{\mathrm{d}H(x - x_0)}{\mathrm{d}x} = \delta(x - x_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(x - x_0)f(x)\mathrm{d}x = -f'(x_0)$$

$$\int_{\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(x - x_0)f(x)\mathrm{d}x = (-1)^n f^{(n)}(x_0)$$

$$\varphi(x)\delta(x - x_0) = \varphi(x_0)\delta(x - x_0),\ \varphi(x) \in C(-\infty, +\infty)$$

$$\delta(bx) = \frac{1}{|b|}\delta(x),\ (b \neq 0)$$

$$\delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$$

苏联数学家索伯列夫(Соболев, 1908—1989)在1936年已经引入了广义函数的初始概念，并把它应用于偏微分方程的研究中，创立了所谓索伯列夫空间和广义解的概念，用泛函分析的方法研究偏微分方程。

索伯列夫生于彼得堡，1929 年毕业于列宁格勒大学，1934 年获物理数学博士学位，1936 年任数学教授，1939 年当选苏联科学院院士。1935 年给出索伯列夫空间的嵌入定理和广义解的理论。他发表论著 150 多种，是苏联偏微分方程学派的首领。

巴拿赫(Banach Stefan，1892—1945)是泛函分析的领袖人物之一，生于波兰克拉科夫，出身铁路工人家庭，由一位洗衣女工抱养长大.童年清苦，14 岁起做家庭教师来养活自己，无大学文凭，靠自学和与数学家交往而获取数学知识。数学家斯泰因豪斯回忆说："1916 年夏一个夜晚，我在克拉科夫花园散步，无意中听到有人谈勒贝格积分，吸引我去看两位谈话者，他们是巴拿赫和尼可丁。"于是斯泰因豪斯与巴拿赫相识且成了合作者，斯泰因豪斯那天晚上向巴拿赫提了一个他研究多日不能解决的有关傅里叶级数收敛的问题。不几日，巴拿赫拿了写成的答案去找斯泰因豪斯。1917 年，两人合作在《克拉科夫科学院会报》上发表了这篇论文。1920 年，利沃夫工学院聘巴拿赫为助教。同年，巴拿赫以博士论文《关于抽象集合上的运算及其在积分方程上的应用》获博士学位。1923 年此文发表在《数学基础》上，成了泛函分析学科问世的标志性成果之一。

1927 年，巴拿赫被聘为利沃夫工学院教授。1924 年他被聘为波兰科学院院士。在巴拿赫和斯泰因豪斯的领导下，形成了泛函分析方面权威的利沃夫数学学派，并创办至今享有盛名的《数学研究》杂志，是泛函分析方面的专门杂志。

1932 年，巴拿赫的名著《线性算子论》出版，总结了关于线性赋范空间的所有成果，是泛函分析的一部经典著作。

1939 年—1941 年巴拿赫任利沃夫工学院院长，波兰数学会主席，乌克兰科学院院士。

由于第二次世界大战的灾难，巴拿赫境况很糟，1945 年因胃癌病逝。1960 年泛函分析国际会议为巴拿赫举行了纪念仪式，1967 年出版《巴拿赫全集》，1972 年，华沙成立巴拿赫国际数学中心。

除了泛函分析之外，巴拿赫在正交级数、拓扑学和集合论等方面亦有建树。例如1924年，巴拿赫和A.塔斯基(Tarski)一篇重要论文《关于将一些点集分割成彼此全等部分的分解》，给出脍炙人口的“分球怪论”：

在三维或更高维欧氏空间中，任何两个有界的含内点的集合(例如两个不同半径的球)总可以分别分割成同等数目的子集，使它们彼此全等，即

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i,\ A_i \cap A_j = B_i \cap B_j = \emptyset, (i \neq j)$$

A_i 与 B_i 全等，即存在保距双射。

这一结论无异于说两个不同半径的球，在一定意义上可以全等，与通常的直观相违，故称其为“怪论”。如何解决这一怪论，目前尚无良策。

巴拿赫是一位有着迷人个性的大数学家。他思想深邃脱俗，但作风平易近人。他是一位现实主义者，以山民子弟自居，瞧不起当时波兰的一般科学家那种对宗教愚忠愚信的殉道观念和自命清高的可憎面目，对那些无所专长而自称有教养的文人学士不屑一顾。巴拿赫在利沃夫搞了一个“苏格兰咖啡馆”，用咖啡馆聚会的方式向年轻的数学家讲学布道。据当年利沃夫学派的S.乌拉姆(后去美国定居且参与第一颗原子弹研制)的文章《回忆苏格兰咖啡馆》中说：“巴拿赫一天生活中有相当多的时间消磨在咖啡馆，当有同事或年轻同行围坐时，他可以滔滔不绝地讲上几个钟头。咖啡屋跟大学研究所和数学会的会场一样，成了爆发数学思想火花的圣地。”咖啡馆里准备了记录本，把数学家们讨论的各种问题笔录下来，积少成多，这些记录本就形成了一部传奇式的“苏格兰书”。此书后来由马尔采夫斯基和斯泰因豪斯编辑出版，巴拿赫的儿子把“苏格兰书”的原稿献给了巴拿赫国际数学中心。

诺依曼在泛函分析的创建过程中立下了卓著的功勋，他对希尔伯特空间上的算子理论等方面的成就成了泛函分析的主题内容之一。他不仅在泛函方面是出色的数学家，而且在数学、物理与计

算机科学诸领域都有划时代的贡献。

冯·诺依曼(Von Neumann John,1903—1957),生于匈牙利布达佩斯,犹太人,其父是富商,被奥匈帝国皇帝授予贵族封号(Von)。冯·诺依曼自幼家庭教育良好,加之天分超常,据说6岁即能心算8位数除法,8岁学会微积分,12岁学习了E.波莱尔(Borel)的《函数论教程》。10岁入大学预科,是匈牙利奥林匹克数学竞赛第一名。不到18岁与一位大学助教合写了一篇关于推广切比雪夫多项式求根定理的论文。他先后在柏林大学和瑞士苏黎世高等技术学院攻读化学,同时保留布达佩斯大学数学系的学籍,每学期末,他便从欧洲赶回布达佩斯参加数学系的期末考试。1925年和1926年,他获得化学工程师文凭和数学博士学位。1931年,聘为美国普林斯顿大学数学系终身教授。1933年,普林斯顿高级研究院刚成立,冯·诺依曼受聘任研究院数学物理终身教授,年仅29岁。此前,他已和希尔伯特、外尔、施密特、爱因斯坦等大科学家过从甚密。普林斯顿是数学与物理学精英云集之地,生活安定,学术气氛浓厚。1932年,冯·诺依曼从数学上总结了量子力学的发展,出版《量子力学的数学基础》一书,这一时期他还部分地解决了关于拓扑群成为李群条件的希尔伯特第五问题。

第二次世界大战爆发之后,冯·诺依曼的学术活动发生了变化,此前,他主要从事纯数学研究,此后他参与了与反法西斯战争有关的高技术工作和应用数学研究。1940年,被聘为弹道实验研究所科学顾问。1941年,受聘任海军兵工局顾问。从1943年起,他以顾问的身份参加制造原子弹的曼哈顿计划,指导原子弹最佳结构与配料的设计工作。

1944年开始,冯·诺依曼对电子计算机的研制与程序设计提出崭新的思想,制订了两份全新的方案,并把主要精力投入计算机的研制和计算机的理论研究工作。1946年,冯·诺依曼与哥德斯坦等人在普林斯顿高级研究院进行了"完全自动通用数字电子计算机"(IAS)的研制,这是现代通用机的原型,1951年制造成功,其运算速度提高到每秒百万次以上。他还发明了自动编程和流程

图，简化了编制程序的繁琐工作，他把计算机应用于核武器设计和天气预报等工程技术上去。

第二次世界大战结束后，冯·诺依曼任普林斯顿高级研究院计算机研究所所长，同时在美国海军武器实验室工作。1954年被任命为美国原子能委员会委员。他还开创了自动机理论研究，1951年发表《自动机的一般逻辑理论》，为人工智能研究奠定了基础。1955年，美国总统任命冯·诺依曼为国家导弹委员会主席，且担任美国数学会主席。1945年—1955年，任美国电子计算机计设局局长。1958年出版《计算机与人脑》一书，把大型计算机与人脑进行比较研究。

冯·诺依曼一生获得众多荣誉，例如1937年获美国数学会博歇(Bocher)奖，1947年获美国总统奖和功勋奖章，1956年获爱因斯坦奖和费密奖等。1961年，《冯·诺依曼文集》出版，收人他生前纯数学论文60篇，应用数学论文60篇，物理学论文20篇。另有未面世的遗稿8000多份，现收藏在美国国会图书馆。

冯·诺依曼作为20世纪最杰出的数学家之一，他的学术思想很值得后人学习借鉴。冯·诺依曼不是孤守一个研究方向，而是四面出击，但绝非猎奇或浅尝辄止，面是在学科交叉的研究当中取得重大的突破，尤其是他不把自己封闭于数学王国之内，而是既善长纯数学，又能关心物理学、力学、计算机科学等非数学领域，且能把实际模型化成数学模型加以研究和解决，不仅解决有社会效益的实际问题(例如原子弹、导弹、计算机的研制与使用技术)，又能在应用数学理论上有大的创造。他认为，数学如果只在纯形式的基础上去寻找统一性，是注定没有前途的。冯·诺依曼的名言是：

“科学不应当只是解释现象，
科学的主要任务是建立数学模型。”

冯·诺依曼在纯数学方面的成就主要在6个方面：集合论与数学基础，测度论，遗历理论，群论，算子理论和格论；应用数学方面的成就主要在4个方面：计算数学，对策(博弈)论、数理经济学、计算机科学。

1923年,关于康托儿的良序集超限数,冯·诺依曼发表了《超限序数引论》的论文。

1925年,发表《集合论的公理化》的论文,这是冯·诺依曼的博士论文,经P.贝尔纳斯(Bernays)和K.哥德尔(Gödel)完善之后,形成公理集合论中的NBG系统,引入"类"的概念,类又分成集合和"真类",规定真类不能作为类的元素,从而可以防止"所有集合的集合"产生的悖论而消除第三次数学危机。NBG是一种有穷公理系统。

1927年,冯·诺依曼发表《关于希尔伯特的证明论》的论文。

在1931年哥德哥提出不完全性定理之前,冯·诺依曼就预感到本系统中存在不可判的命题,例如他在《集合论的公理化》中说:"暂时,除了陈述集合论本身的缺陷外,我们还能做什么呢?没有一种已知的方法可以避免其中的困难!"

1933年—1934年,冯·诺依曼把欧氏空间中勒贝格的测度理论推广到抽象空间,出版了专著《函数算子》。

1933年,发表《拓扑群中解析参数导论》一文,证明了希尔伯特第五问题在紧致群的条件下是肯定的。

关于泛函分析中的算子理论占他全部科学成果内容的$\frac{1}{3}$。1927年—1930年,他首先给出了希尔伯特空间的抽象定义,即现在我们正在使用的关于希尔伯特空间的定义。1929年,发表《函数运算代数和正规算子理论》。1935年,发表《论算子环》的系列论文,形成了所谓"诺依曼代数",推广了有限维空间内的矩阵代数。

1928年发表的《关于伙伴游戏理论》,标志着对策论作为一门数学分支正式创立。1940年,与奥地利经济学家O.摩根斯坦(Morgenstern)合作出版了《对策论与经济行为》的数理经济学专著,开辟了数理经济学的先河。

对于计算方法,冯·诺依曼是这方面的专家,例如他与S.乌拉姆倡导的蒙特卡罗法,把求解的数学问题化成概率模型而获得近

似解。又如计算 n 维立方体的某子区域内的体积时，按均匀的概率在空间随机地选点，再利用计算机确定落在该子区域点子的比例，当所选的点足够多时，此比例便可确定该子区域的体积，此方法的优点是对问题的几何形状不敏感，收敛速度与维数无关，特别适合高维的问题。

1947年，冯·诺依曼在阐述数学思想的著作《数学家》一书中指出：数学的发展与自然科学有着密切的联系，数学方法渗透于并支配着自然科学的所有理论分支。数学有其经验来源，不可能存在绝对的、脱离所有人经验的严密性概念；而另一方面，数学是创造性科学，受审美观的支配，选择题材和判断成功的标准都是美学的，但必须防止纯粹美学化的倾向；为此，应该不断地在数学中注入一些或多或少来自经验的思想。冯·诺依曼一生贯彻他的这种学术思想，他涉足于众多的科学领域，力求使数学与物理及其他自然科学的纷繁复杂的实际表现发生联系，创造数学理论与方法去解决这些实际问题，从中受到启发与积累数学经验，提炼出数学的普适性的统一的抽象理论，进而组建严密的逻辑体系和主宰万物的普遍真理。

第七章　微分方程

对自然界的深刻研究，是数学最富饶的源泉。

——J.傅里叶

1　常微分方程

常微分方程是17世纪和微积分同时诞生的一门理论性极强又有广泛应用的数学中心学科之一。微分方程是连接物质科学乃至社会科学与数学科学的主要桥梁，它吸收数学各个分支的成果又带动数学各分支的发展，是一门综合性颇强的数学分支。

1676年，莱布尼兹给牛顿的信中第一次提出“微分方程”这个数学名词。

1693年，莱布尼兹给出一阶线性方程

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)$$

的通解为

$$y(x) = e^{\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx + c\right]$$

其中 c 是任意常数，且可以把零次齐次函数微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = f\left(1,\frac{y}{x}\right)$$

化成可分离变量的方程。

1696年—1697年，莱布尼兹和雅各布·伯努利用变换 $z = y^{1-n}$ 把伯努利方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$$

线性化从而可得其通解。

1740 年,欧拉用自变量代换 $x = e^t$ 把欧拉方程线性化而求得

$$a_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n y = 0$$

的通解,其中 a_i 是常数。

通解和特解的概念是 1743 年欧拉定义的,同时欧拉还给出恰当方程的解法和常系数线性齐次方程的特征根解法。

1739 年 9 月 15 日,欧拉给约翰·伯努利的信中写道:

"最近我发现了一个求高阶微分方程的方法,按照这一方法,只要解出一个有限的代数方程,就可以直接得出微分方程的积分,而且这一方法适用于所有具有如下一般形式的方程

$$y + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{b\,d^2y}{dx^2} + \frac{c\,d^3y}{dx^3} + \frac{d\,d^4y}{dx^4} + \frac{e\,d^5y}{dx^5} + \cdots = 0$$

为了求出上述方程的积分,我考虑以下方程或代数表示式

$$1 + ap + bp^2 + cp^3 + dp^4 + ep^5 + \cdots = 0$$

因为不论什么样的方程,都可以表示成一些因式之积,这些因式是单因式 $1 - \alpha p$ 或者二次因式 $1 + \alpha p + \beta pp$,并且都是实因式。进行了这种分解之后,我认为 y 的值就是一个关于 x 和某些常数的有限表达式,它由所有那些与上述代数表达式的因式相对应的成员组成,各别成员构成积分的个别项。单因式 $1 - \alpha p$ 给出积分成员 $ce^{\frac{x}{\alpha}}$,因式 $1 + \alpha p + \beta pp$ 给出积分成员

$$e^{-\frac{\alpha}{2\beta}x}\left(C\sin \frac{\sqrt{4\beta - \alpha\alpha}}{2\beta}x + D\cos \frac{\sqrt{4\beta - \alpha\alpha}}{2\beta}x \right)$$

值得注意的是,$1 + \alpha p + \beta pp$ 不能被分解成单因式,当 $4\beta > \alpha\alpha$ 时,所得积分仍然是实的。下面让我们来举一个适当的例子

$$y dx^4 = k^4 d^4 y, \text{或} \quad y - \frac{k^4 d^4 y}{dx^4} = 0$$

对应的代数表达式为 $1 - k^4 p^4 = 0$,它有 3 个实因式 $1 - kp$,$1 + kp$,$1 + k^2 p^2$,由这些因式得出方程的积分为

$$y = Ce^{-\frac{1}{k}x} + De^{\frac{1}{k}x} + E\sin\frac{x}{k} + F\cos\frac{x}{k}$$

在这表示式中,因为我们一步写出 4 项积分,按积分性质的要求,它就含有 4 个新的常数。如果能让您满意,最尊敬的阁下,我将在另外场合写出我的证明。"

欧拉信中的"代数表示式"现在已改称为常系数线性齐次常微分方程的特征方程。欧拉在这封信里已经明白无误地创造出现在教科书中所用的常系数线性齐次微分方程的解法。

17 世纪到 18 世纪是常微分方程发展的经典理论阶段,以求通解为主要研究内容。

1685 年,伟大的数学家莱布尼兹向当时的数学界推出求解方程(黎卡提方程的特例)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + y^2$$

的通解的挑战性问题,且直言自己研究多年未果。这个方程状似朴素简单,但经 150 年几代数学家们的全力冲击仍不得其解。1841 年法国数学家刘维尔证明意大利数学家黎卡提 1724 年提出的黎卡提方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

的解一般不能通过初等函数的积分来表达,从而让大家明白了不是什么方程的通解都可以用积分手段求出的。

在方程发展的第一个阶段,出现许多精彩的成果。例如 1694 年,莱布尼兹发现了方程解族的包络,1718 年泰勒提出奇解的概念,克莱罗和欧拉对奇解进行了全面研究,给出从微分方程本身求得奇解的方法,参加奇解研究的数学家还有拉格朗日、凯莱和达布等人。

由于碰了黎卡提方程的钉子,从 18 世纪下半叶到 19 世纪,人们从求通解的热潮转而研究常微分方程定解问题的适定性理论,此为常微分方程发展的适定性理论阶段。

19世纪20年代,柯西建立了柯西问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)\\ y(x_0) = y_0\end{cases}$$

解的存在唯一性定理。1873年,德国数学家李普希兹提出著名的"李普希兹条件",对柯西的存在唯一性定理作了改进。

李普希兹(Lipschitz Rudolf Otto Sigismund,1832—1903)生于哥尼斯堡,1853年获柏林大学博士学位,1846年任波恩大学教授,先后当选为巴黎、柏林、格丁根、罗马等科学院院士,从事的数学研究方向为数论、贝塞尔函数、常微分方程、位势理论、微分几何和分析力学。

在适定性的研究当中,与柯西、李普希兹同一时期,还有皮亚拿和比卡,他们先后于1875年和1876年给出常微分方程的逐次逼近法,皮亚拿在仅仅要求$f(x,y)$在(x_0,y_0)点邻域连续的条件下证明了柯西问题解的存在性。

比卡(Picard Charles Emile,1856—1941)生于巴黎,1877年毕业于巴黎高等师范学校,1879年任图卢兹大学教授,1898年任巴黎大学教授,1917年任法国科学院终身秘书,伦敦皇家学会会员,主要贡献在复变函数论、微分方程、代数几何等方面,著名的成果有复变函数论中的两个"比卡定理"和微分方程中的比卡序列等。主要著作有《分析数学专论》、《泛函方程讲义》和《二元代数函数论》。

19世纪为常微分方程发展的解析理论阶段,这一时段的主要成果是微分方程的解析理论,运用幂级数和广义幂级数解法,求出重要的一些二阶线性方程的级数解,并得到极其重要的一些特殊函数。同时在这一时期,庞加莱开创了微分方程定性理论研究,李雅普诺夫则开创了微分方程运动稳定性理论的研究。20世纪是微分方程定性理论阶段。

1816年贝塞尔研究行星运动时,开始系统地研究贝塞尔方程

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

这个方程的特殊情形早在1703年J.伯努利给莱布尼兹的信中就

已提出，后来丹尼尔·伯努利和欧拉也都讨论过这一方程，傅里叶和泊松(Poisson)也讨论过它。

贝塞尔得到了此方程的两个基本解 $J_n(x)$ 和 $J_{-n}(x)$，$J_n(x)$ 称为第一类贝塞尔函数或 n 阶贝塞尔函数，$J_{-n}(x)$ 称为第二类贝塞尔函数或 $-n$ 阶贝塞尔函数。

初等函数之外的函数，称之为特殊函数。从18世纪以来，数学家们曾得出过数以百计的特殊函数，现在这些函数大部分已被遗忘，但尚有几种特殊函数，由于它们在数学和自然科学中的作用非常之大，由历史筛选为每个数学家和自然科学家必须通晓的数学工具。贝塞尔函数就是这种特别重要的特殊函数之一。当我们对它足够熟悉之后，写一个贝塞尔函数的符号 $J_n(x)$ 参与运算时，就像写了一个 $\sin x$ 一样地亲切和心安理得。

贝塞尔(Friedrich Wilhelm Bessel，1784—1846)，德国数学家和天文学家，生于明登，卒于哥尼斯堡。15岁辍学到商店当学徒，自学天文与数学，20岁时发表彗星运行轨道的论文，1810年任哥尼斯堡天文台台长，1812年当选柏林科学院院士。代表作是1818年出版的《天文学基础》。对贝塞尔方程的深人系统的研究，为天文学提供了重要数学论证与计算方法。他是高斯的亲密朋友，发现了其密度是水的几千倍的一颗“死星”，命名为天狼星伴星，对现代天文学做出突出贡献。

贝塞尔求得贝塞尔方程的级数解

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(-n+k+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$

贝塞尔令贝塞尔方程有形如

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+\rho}$$

的级数解，代入贝塞尔方程得到 $\rho = \pm n$，且得到了系数 C_n 的递推公式

$$(\rho+n+k)(\rho+k-n)C_k+C_{k-2}=0,k=1,2,\cdots$$

进而得到了系数 C_{2k}的表达式，$C_{2k+1}\equiv 0$。

1818 年，贝塞尔证明了 $J_n(x)$有无穷个零点。1824 年，贝塞尔给出递推公式

$$xJ_{n+1}(x)-2nJ_n(x)+xJ_{n-1}(x)=0$$

后来有众多数学家和天文学家得出贝塞尔函数的数以百计的关系式和表达式。1944 年，剑桥大学出版了 G. N. Watson 的巨著《贝塞尔函数教程》，是贝塞尔函数研究成果的集大成。

1867 年，Carl. G. Neumann 等人还研究了函数按贝塞尔函数的广义傅里叶级数展开问题，得到展开式

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}a_jJ_n(\beta_jx)$$

其中$\{\beta_j\}$是 $J_n(x)$的零点，$0<\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_k<\cdots$

这种展开式的主要根据是贝塞尔函数的正交性

$$\int_0^1 tJ_n(\beta_jt)J_n(\beta_kt)\mathrm{d}t=0,j\neq k$$

展式中的系数为

$$a_j=\frac{2}{[J'_n(\beta_j)]^2}\int_0^1 tf(t)J_n(\beta_jt)\mathrm{d}t。j=1、2,\cdots$$

在解析理论中另一个极重要的内容是勒让德方程的级数解和勒让德多项式方面的成果。

1784 年，勒让德出版的代表作《行星外形的研究》中研究了勒让德方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)=0$$

假设它有幂级数解 $y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$，代人方程后求得递推公式

$$(k+2)(k+1)a_{k+2}+(n-k)(n+k+1)a_k=0$$

从中求出 a_k 的表达式

$$a_{2m}=(-1)^m\frac{a_0}{(2m)!}(n-2m+2)\cdots$$

$$(n-2)n(n+1)(n+3)\cdots(n+2m-1)$$

$$a_{2m+1}=(-1)^m\frac{a_1}{(2m+1)!}(n-2m+1)\cdots$$

$$(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)\cdots(n+2m)$$

其中 a_0, a_1 是任意常数，$a_0=0, a_1=1$ 时得一解 $y_1(x)$，$a_0=1, a_1=0$ 时得另一解 $y_2(x)$，$y_1(x)$与 $y_2(x)$是基本解组。当 n 为偶数时，$y_2(x)$为多项式，当 n 为奇数时，$y_1(x)$为多项式，这些多项称为勒让德多项式，法国的一位银行家(业余研究数学)罗德里格斯得出公式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)$$

其中 $P_n(x)$是勒让德多项式，$n=0,1,2,3,\cdots$

勒让德多项式有正交性：

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=0 \qquad (m\neq n)$$

所以$[-1,1]$上定义的可积函数 $f(x)$有广义傅里叶展开式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_nP_n(x)$$

其中 $P_n(x)$是勒让德多项式，系数

$$f_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx$$

利用正交性勒让德又研究出一个重要结论：

若 $f(x)$是$[-1,1]$上的平方可积函数，次数不超过 n 的多项式 $p(n)$当中，使得

$$I=\int_{-1}^{1}[f(x)-p(x)]^2dx=\min$$

的 $p(x)$恰为 $f(x)$的按勒让德多项式展开的广义傅里叶级数的前 $n+1$ 项，即函数按勒让德多项式展成的广义傅里叶级数的前 $n+1$ 项和是 $f(x)$用不超过 n 次多项式最小二乘逼近的中选多项式。

勒让德(Legendre Adrien Marie，1752—1833)，法国数学家，生于巴黎，1770 年毕业于马扎兰学院，1775 年任巴黎军事学院教授，

1782年以《关于阻尼介质中的弹道研究》获柏林科学院奖，次年当选为巴黎科学院院士，1787年当选为伦敦皇家学会会员。主要从事分析、几何、数论和天体力学的研究。1794年，出版《几何学基础》，其中讨论了平行公设问题，证明了 π 与 π^2 的无理性。1830年出版的《数论》，使他成为解析数论的先行者之一。重要著作还有《椭圆函数论》，提出三类基本的椭圆积分，证明每个椭圆积分皆为这三类基本的椭圆积分之组合，且编出椭圆积分数值表，是椭圆积分的奠基人之一。在数学界，与拉格朗日、拉普拉斯并称“名人3L”。

厄米特(C. Hermite, 1822—1901)研究了方程

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0,\ x \in (-\infty, +\infty)$$

得到了幂级数解。当 λ 是非负偶数时，这个解即为著名的厄米特多项式。

厄米特是19世纪法国最杰出的数学家之一，他证明了 e 的超越性，用椭圆函数解一般五次方程，对特殊函数、数论、代数和分析有重要贡献。不少成果以厄米特命名，例如厄米特矩阵、厄米特多项式等。他的学术生涯颇有戏剧性，上大学时，因忽视平时作业，考试成绩很糟。毕业于巴黎综合工程学校。1856年当选法国科学院院士，1869年任巴黎理学院教授和索尔蓬大学教授，彼得堡科学院名誉院士。他培养了法国一代数学精英，例如毕卡(Picard)、波雷耳(Borel)和庞加莱(Poincare)这些大数学家都是厄米特的门生。他的成果不但数学理论性强，而且应用价值极大，例如厄米特矩阵对海森堡的量子力学，厄米特多项式对薛定谔方程都有大用。

切比雪夫(Tchebycheff, 1821—1894)研究了方程

$$(1 - x^2)y'' - xy' + p^2 y = 0 \quad (p\ 是常数)$$

得出 $|x| < 1$ 时的两个线性无关解(基本解)，且证明当 p 是非负整数时，此方程有一个解为 n 次多项式，此多项式(乘以适当常数仍是解)即著名的切比雪夫多项式。

切比雪夫出身贵族，生于俄国卡卢加，1837年，16岁时考入莫斯科大学物理数学专业，毕业后留校作助教，1846年转入彼得堡

大学做助教,他的才干得到布雅可夫斯基和奥斯特罗格拉德斯基两位大数学家的赏识。1847年,切比雪夫在《关于用对数积分》的晋职报告中,解决了奥斯特罗格拉德斯基提出的一类无理函数的积分问题。1849年,他的《论同余式》的博士论文通过答辩,且获彼得堡科学院最高数学奖。1860年任彼得堡大学教授,1872年,彼得堡大学授予他功勋教授称号。

在彼得堡大学,切比雪夫教过10余门课程,著名的微分方程专家李雅普诺夫评价说:"切比雪夫的授课精练、生动,富有吸引力,热衷于向学生阐明最重要的观念,充满了对问题和科学方法重要意义的奇妙评论。"

1859年,切比雪夫当选彼得堡科学院院士兼应用数学部主席。1873年当选为法兰西科学院、柏林皇家科学院通讯院士和意大利科学院院士。

19世纪以前,俄国数学落后,科学院的院士都是外国人,例如欧拉、尼古拉·伯努利、丹尼尔·伯努利和哥德巴赫等,俄罗斯没有自己的著名数学家。到19世纪上半叶,才出现了罗巴切夫斯基、布雅可夫斯基、奥斯特罗格拉德斯基等优秀数学家,但大多是在西欧受教育成长起来的。切比雪夫是土生土长的俄国学者,他有自己独特的学术风格,成为彼得堡学派的奠基人和当之无愧的领袖,他在概率论、解析数论和函数逼近论(用切比雪夫多项式逼近)领域作出了具有世界领先水平的成果。

理论联系实际是切比雪夫的一个鲜明特点,用直观的初等方法解决难题是他的罕见专长,他的名言是:

"使数学家脱离实际需要,
就好比把母牛关起来,
不让它接触公牛。"

1878年,在巴黎博览会的俄国馆,展出了切比雪夫的各种机械制造类发明,其中有手摇计算机、划船机械人、机械马等令人叹为观止的精妙设计模型。1893年,在美国芝加哥万国博览会上,又展出切比雪夫的大批发明样品,例如曲线规、压力机、筛分选种

机、步行机等，鬼斧神工，引起观众的轰动。他的许多发明至今仍在俄国科学院和莫斯科博物馆以及巴黎艺术学院收藏，共计 80 余种。在机械制造方面，切比雪夫应用数学模型进行设计与计算，在理论上得出许多重要结果，例如直动机理论、连续运动化为脉冲运动理论、最简平行四边形定则、绞链杠杆系统变成机械的条件、三绞链四环节连杆运动定理、离心控制器原理等。

1856 年，切比雪夫被任命为俄国炮兵委员会委员，他用插值理论分析弹着点。同年他在彼得堡大学教授联席会上作了《论地图制法》的报告，用数学理论改进了地图的绘制。1878 年，在法国科学院第七次年会上，切比雪夫作了《论服装裁剪》的报告，提出的“切比雪夫网”，成了曲面论中的一个重要概念。

切比雪夫还是一位热心的教育家，著名的微分方程运动稳定性理论创始人李雅普诺夫就是他的学生。他还不顾沙皇政府的反对，力排众议，推荐世界上第一位女博士柯瓦列夫斯卡娅为俄国科学院通讯院士。

切比雪夫终生未娶，虽出身贵族，但生活简朴，积蓄全部用于买书和机械制造的研制。去世时，身后既无后代，亦无金钱，但他给人类留下的是一笔不可估量的数学遗产和一个人才荟萃的数学学派。

在常微分方程的解析理论研究中，也有数学王子高斯的成果。1812 年，高斯研究了高斯超几何方程

$$x(1-x)y''+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}y'-\alpha\beta y=0$$

得到级数解

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots \qquad (7.1)$$

这个级数称为超几何级数。高斯还建立了公式

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

高斯指出，对于 α,β,γ 的不同的值，这个级数(7.1)包括了几乎所有的初等函数和许多像贝塞尔函数等特殊函数，例如

$$F(1,\beta,\beta;x)=1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

α,β 等于零或负整数时，超几何级数是一个多项式等。

1839 年，法国数学家拉梅(Laḿe Gabriel，1795—1870)把拉普拉斯方程变成拉梅方程

$$(\rho^2-h^2)(\rho^2-k^2)\frac{\mathrm{dE}(\rho)}{\mathrm{d}\rho^2}+\rho(2\rho^2-h^2-k^2)\frac{\mathrm{dE}(\rho)}{\mathrm{d}\rho}+$$

$$\{(h^2+k^2)p-n(n+1)\rho^2\}\mathrm{E}(\rho)=0$$

其解 $\mathrm{E}(\rho)$称为拉梅函数或椭球调和函数。对于整数 n，拉梅函数形如

$$\mathrm{E}_n^p(\rho)=a_0\rho^n+a_1\rho^{n-2}+\cdots$$

或者是这种多项式乘上$\sqrt{\rho^2-h^2}$，或者乘上$\sqrt{\rho^2-k^2}$，或者乘上$\sqrt{\rho^2-h^2}$与$\sqrt{\rho^2-k^2}$两个因子。

$$\mathrm{F}_n^p(\rho)=(2n+1)\mathrm{E}_n^p(\rho)\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\rho}{\sqrt{(\rho^2-h^2)(\rho^2-k^2)[\mathrm{E}_n^p(\rho)]^2}}$$

$\mathrm{F}_n^p(e)$称为第二类拉梅函数。

拉梅是巴黎大学教授，主要贡献在微分方程、微分几何、数论和函数论几方面。1839 年，他证出费马大定理 $n=7$ 时成立。他还对应用力学颇有研究，曾到俄国从事桥梁工程的设计与施工。

19 世纪方程解析理论中一个重点成果是关于奇点的富克斯理论。德国数学家富克斯(Fuchs Immanuel Lazarus，1833—1902)是外尔斯特拉斯的学生，柏林科学院院士。他看到著名的贝塞尔方程、勒让德方程和高斯超几何方程等，如果表成形如

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{n-1}+\cdots+p_n(x)y=0 \qquad (7.2)$$

的形式，则系数有奇异性！于是富克斯深入研究这种齐次线性方程在奇异点邻域内解的性质，他把 x 改成 z，在复平面上讨论这种方程，富克斯得出结论：

若系数 $p_1(z),p_2(z),\cdots,p_n(z)$在 a 点及其某个邻域内解析，且 $y(a),y'(a),\cdots,y^{(n-1)}(a)$是任给定的初值，则方程(7.2)存在唯一的形如

$$y(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}y^{(r)}(a)(z-a)^r$$

的幂级数解,此级数在以 a 为中心,$p_i(z)$在其中解析的任何圆内绝对一致收敛;解仅在系数有奇异性的地方有奇异性。

1784 年,Geory Frobenius 讨论了方程

$$Z^n\frac{d^n w}{dz^n}+z^{n-1}p_1(z)\frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}}+\cdots+zp_{n-1}(z)\frac{dw}{dz}+p_n(z)w=0$$

其中 $p_i(z)$在 $z=0$ 及其邻域内解析,可以得到 n 个基本解。若用级数来表示,此级数形如

$$w=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu z^{\rho+\nu}$$

其中系数 c_ν 和指标 ρ 可以确定,此级数在某一邻域内收敛。

1833 年,瑞士数学家斯图姆(Sturm Charles Francois, 1803—1855)和他的好朋友刘维尔(Liouville Joseph, 1809—1882)开始研究二阶方程

$$Ly''+My'+\lambda Ny=0$$

的特征问题,其中 $L\neq 0$, L, M, N 是 x 的连续函数,λ 是参数。遍乘 $L^{-1}e^{\int ML^{-1}dx}$ 之后,方程化为

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda\rho(x)y=0, p(x)>0, \rho(x)>0$$

考虑它的边值条件

$$\begin{cases}y'(a)-h_1y(a)=0\\ y'(b)+h_2y(b)=0, \quad h_1\geqslant 0, h_2\geqslant 0, a<b\end{cases}$$

斯图姆和刘维尔得出结论:

(1) 仅当 λ 取递增到 $+\infty$ 的一个正数列$\{\lambda_n\}$的任一值时,此边值问题有非零解。

(2) 对每一个 λ_n,解是一个函数 v_n 的倍数,v_n 可以用 $\int_a^b \rho v_n^2 dx=1$ 加以规范化。

(3) 存在正交性 $\int_a^b \rho v_m u_m dx=0, m\neq n$。

(4) 每个在区间(a,b)上二次连续可微的满足边条件的函数 $f(x)$可以展成一致收敛级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n v_n(x)$$

其中 $c_n=\int_a^b \rho f v_n(x)\mathrm{d}x$。

(5) $\int_a^b \rho f^2(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2$。

结论(5)是1799年由法国数学家 Marc-Antoine Parseval 得到的,称为 Parseval 公式。

斯图姆是巴黎科学院、柏林科学院、彼得堡科学院院士,英国皇家学会会员。除上述特征问题方面的贡献外,还于1829年解决了实系数代数方程实根个数问题,以及射影几何和微分几何方面的一些重要问题。1827年,还因研究不可压流体的论文而获巴黎科学院大奖,1833年加入法国籍。

刘维尔是法国著名数学家,1830年毕业于法国道路与桥梁学院,1836年获博士学位,先后在巴黎综合工科学校、法兰西学院、巴黎大学任数学分析与理论力学教授。1839年当选为巴黎科学院院士,1836年创办《纯粹与应用数学学报》,连任主编40年,被誉为"刘维尔杂志",发表过众多著名数学家的大作,例如1846年首次刊出伽罗瓦关于群论的开山之作,此杂志对19世纪的数学发展起了重要作用。刘维尔本人发表论文400多篇,涉及数学与物理学的十几个分支,例如他首次证明超越数的存在性,建立了解析函数一般理论中的"刘维尔定理":平面上任一有界整函数皆常数。

1877年,Hill 研究二阶方程(Hill 方程)

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\theta(t)x=0$$

其中 $\theta(t)$以 2π 为周期,用他研究的结论证实月球近地点的运动是周期性的。开创了周期系数方程的研究,庞加莱也参加了 Hill 方程的研究。在 Hill 工作的启发之下,庞加莱为支配行星运动及其稳定性和周期性的研究开辟了一条新的途径,开创了微分方程定性研究的新时代。

2 常微分方程定性理论

自从 1841 年刘维尔证明黎卡提方程$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$不存在初等函数积分表示的解之后,研究方程的方法有了明显变化,数学家们开始从方程本身(不求解)直接讨论解的性质。法国大数学家们研究的三体问题就不能用已知函数明显地解出,从而运动的稳定性问题就不可能通过考察解的性态而得到。庞加莱终于找到了从方程本身找出答案的诀窍,1881 年,1882 年,1885 年和 1886 年,他在《Jour. de Math》杂志上用同一标题《关于由微分方程确定的曲线的报告》发表了 4 篇论文,他说:"要解答的问题是,动点是否描出一条闭曲线?它是否永远逗留在平面某一部分内部?换句话说,并且用天文学的话来说,我们要问轨道是稳定的还是不稳定的?"从 1881 年起,庞加莱独创出常微分方程的定性理论。

庞加莱在他的 1881 年和 1882 年的论文当中分析道:"由微分方程所定义的函数的完整理论对纯数学与力学中的许多问题都是有用的。然而,在多数情况下,显然利用已知函数去积分这些方程根本不可能。因此,如果局限于那些可以通过积分处理的情况,那么可以研究的领域将非常之有限,而且应用中出现的大量问题也将无法解决。"

"因此,有必要研究微分方程所定义的函数本身,而不企图将其化简到比较简单的函数。这类似于我们研究代数函数时遇到的情形,先前人们试图将其简化为根式,而现在人们大都直接对其进行研究,在研究微分方程时,也是如此。对一个函数的研究,包括两个部分:

(1) 定性部分,或者说该函数所定义的曲线的几何研究。

(2) 定量部分,或者说该函数的函数值的数值计算。

例如在研究代数函数时,首先用施图姆(Sturm)定理找到实根个数,这是定性部分,接着计算这些根的数值,这就是对函数进行

定量分析。

构造微分方程定义的曲线，这一步定性研究一旦完成，将有利于函数的数值计算。"

"定性研究本身也是非常有趣的。事实上，许多极为重要的分析与力学问题，都能简化为定性研究。例如三体问题，人们可以问，是否三体之一将始终停留在天空的某一特定区域，或者它是否会消退于无穷？也可以问，是否三体之某两体之间的距离将无限地增大或缩小，或者保持有界？这种类型的问题可以问上一千个，然而一旦人们定性地构造出三体运动的轨道，它们将全部得到解决。

以上问题，给几何学家展现了一个广阔的研究领域，在此，我不想面面俱到，而只想涉及它的前沿。我想把自己局限在一个非常特殊然而却最自然的情形，即考虑一阶微分方程

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} \tag{7.3}$$

其中 X 与 Y 是 x,y 的多项式。"

庞加莱在研究方程(7.3)时发现了满足方程组

$$\begin{cases} X(x,y) = 0 \\ Y(x,y) = 0 \end{cases}$$

的点(x,y)对微分方程(7.3)的轨线研究是一种关键点，他把这种点称为奇点。如果把方程(7.3)写成方程组形式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = X(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = Y(x,y) \end{cases} \tag{7.4}$$

(x,y)平面(现称相平面)上奇点也是解。庞加莱把奇点分成4类：焦点、鞍点、结点和中心。

庞加莱在他1881年—1886年的4篇文章中发现了非线性方程组(7.4)的极限环，而且建立了极限环的存在定理，即著名的庞加莱环域定理：

若 Ω 是一个环域,其中无奇点,Γ_1 与 Γ_2 分别是 Ω 的内外边界,当 t 增加时,与 Γ_1,Γ_2 相交的轨线皆进入 Ω,则 Ω 内至少存在一个外侧稳定和一个内侧稳定的极限环。

在讨论轨线时,庞加莱使用了极坐标。

对于奇点,庞加莱引进了闭曲线指数的概念。对于方程组(7.4),庞加莱定义

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_C \mathrm{d}\left(\operatorname{arctg}\frac{Y(x,y)}{X(x,y)}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{X\mathrm{d}Y - Y\mathrm{d}X}{X^2 + Y^2}$$

为闭曲线 C 的指数,且证明出下列结论:若 C 是闭轨,则 $I = 1$;C 内无奇点,则 $I = 0$,若 C 内仅含一个奇点时,I 称为此奇点的指数;庞加莱得到结论:

闭轨内各奇点的指数的代数和为 1。

庞加莱(Jules Henri Poincare,1854—1912)是 20 世纪最伟大的数学家之一。生于法国南锡。庞加莱幼年时即为一个诚实、正直、公平待人的孩子,以至于被同伴误认为笨拙,但他的真正兴趣不在于在游戏中胜过小朋友,而在于读书,他的记忆迅速、准确而持久,而且有丰富的想象力和直觉本领,思考问题,注意力绝对集中,可以不受外界一切干扰。

1873 年人综合工科学校深造,1879 年获数学博士学位。1881 年任巴黎大学教授,主讲力学与实验物理学课程。33 岁当选为法国科学院院士,1906 年任法国科学院院长,1908 年当选为法兰西学院院士。在 34 年的学术生涯当中,发表 500 篇科学论文和 30 种科学专著,几乎覆盖了纯数学和应用数学的所有领域。最突出的贡献在微分方程定性理论方面,是现代常微分方程研究的开山鼻祖,对天体力学和电动力学也有极其重要的贡献。他是 19 世纪最后四分之一和 20 世纪初数学界的领袖人物。对所处时代的全部数学有创造性的掌握和创新,庞加莱可能是达到这种地步的最后一位大师了。1912 年 6 月 26 日,猝死于心肌梗塞,亡年 58 岁。庞加莱的名言是:

“人生就是持续的斗争。”

V.沃尔泰拉悼念庞加莱时说:"我们确信,庞加莱的一生没有片刻的休息,永远是一位朝气蓬勃的、健全的战士,直至他的逝世。"

庞加莱在学术上是一个征服者,但不是一个"殖民者",他是与高斯媲美的全才数学家,生前他获得法国政府的最高荣誉,还得过英、俄、瑞典、匈牙利等国政府的奖赏,担任过法国以外其他国家科学院院士头衔30几个,他的名著被译成十几种文字在全世界大量发行,例如名著《关于由微分方程确定的曲线的报告》4篇文章以及《天体力学的新方法》3卷是现代微分方程及天体力学的开山之作。1916年—1954年,巴黎科学院出版了《庞加莱全集》10卷,是继欧拉、柯西之后,最多产的数学家,生前任巴黎大学教授期间每年开一门新课,而且在每门课程中都有他自己的创造性成果教授给学生。

庞加莱是直觉主义的一个强有力的倡导者,他认为"逻辑用于论证,直觉用于发明",他认为真理是人们为了方便而约定的原理,他是一位颇具哲学气质的数学家。

庞加莱的定性理论是动力系统的开端。

另一位对常微分方程定性理论的主要创始人是挪威数学家班迪克逊(Bendixson Ivar Otto),从1900年起,他开始从事由庞加莱开创的微分方程轨线的拓扑性质的研究工作,1901年发表著名论文《由微分方程定义的曲线》。

班迪克逊的重要成果很多,例如:

(1) $\dot{x}=X(x,y),\dot{y}=Y(x,y)$中,在单连通区域$G$内$X(x,y),Y(x,y)$连续可微,且$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}$保持常号,不在$G$的任子区域内恒为零,则$G$中无闭轨。

(2) 自治系统$\dot{x}=X(x,y),\dot{y}=Y(x,y)$的从$(x_0,y_0)$点出发的轨线的极限集合不空、有界、不含奇点,则此极限集是一个闭轨。

(3) 自治系统只有有限个奇点,则在有界区域内的半轨线的极限集只能是以下3种之一:

①一个奇点;②一个闭轨;③奇点和当$t\to+\infty,t\to-\infty$时趋

于这些奇点的轨线。

其中(2)与(3)是与庞加莱联合署名发表的。轨线的极限集的定义是 1912 年由美国数学家伯克霍夫(Birkhoff George David, 1884—1944)给出的:

设 $\gamma = \gamma_P(t)$ 是平面自治系统 $\dot{x} = X(x,y), \dot{y} = Y(x,y)$ 的过 P 点之轨线,相平面上一点 Q 称为 $\gamma_P(t)$ 的 ω 极限点(α 极限点),若存在趋于 $+\infty(-\infty)$ 的序列 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots (t_1 > t_2 > t_3 > \cdots > t_n > \cdots)$,使得

$$\lim_{n \to \infty} d(\gamma_P(t_n), Q) = 0$$

其中 $d(A,B)$ 是 A, B 两点之间的欧几里得距离。

伯克霍夫生于美国密执安州,其父是物理学家,伯克霍夫 1907 年获芝加哥大学博士学位。他倾心攻读庞加莱的著作,继承了庞加莱在动力系统领域的研究方法,且作了重大发展。1911 年任普林斯顿大学教授,1935 年—1939 年,任哈佛大学文理学院院长,1924 年—1926 年,任美国数学会主席,1936 年—1937 年任美国科学促进会主席,是美国数学界公认的一位杰出的领袖,一生获得许多世界性数学奖。

常微分方程定性理论中另一个重要领域是 1892 年由俄国数学家李雅普诺夫创立的运动稳定性理论。1892 年李雅普诺夫的博士论文《关于运动稳定性的一般问题》给出了判定运动稳定性的普遍的数学方法与理论基础。李雅普诺夫毕业于彼得堡大学数学系,1901 年当选为彼得堡科学院院士,是切大雪夫创立的彼得堡学派的杰出代表。

李雅普诺夫论文的内容用现在的表述方式摘要如下:

$\dot{x} = f(t,x), t \in [0, +\infty), x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$; D 是开区域。$x = \psi(t)$ 是一个解,$t \in [0, +\infty)$,对任给的 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,使得

(1) 满足 $\| x_0 - \psi(0) \| < \delta$ 的初值 $x(0) = x_0$ 对应的解 $\varphi(t; 0, x_0)$ 在 $[0, +\infty)$ 上存在;

(2) 对一切 $t \in [0, +\infty)$,

$$\| \varphi(t;0,x_0) - \psi(t) \| < \varepsilon$$

则称特解 $x = \psi(t)$在李雅普诺夫意义下稳定。

若还有

$$\lim_{t \to +\infty} \| \varphi(t;0,x_0) - \psi(t) \| = 0$$

则称 $\psi(t)$是李雅普诺夫意义下渐近稳定;若 $\delta > 0$ 可以任意选取,则称 $\psi(t)$全局渐近稳定。

李雅普诺夫还给出了稳定性的两个判别法:

(1) 对于 $\dot{x} = Ax + R(t,x)$,
其中 A 是常数矩阵,若 A 的特征值皆有负实部,且 $R(t,x)$在 $\|x\| < H, t \geqslant 0$ 上连续,对 x Lip. 连续,$R(t,0) = 0$, $\lim_{\|x\| \to 0} \frac{1}{\|x\|} \| R(t,x) \| = 0$,则零解渐近稳定。

(2) 若 $f(0) = 0$,$f(x)$在 $\|x\| \leqslant h$ 上连续,$V(x)$是 $\|x\| \leqslant h$ 上的定正(负)函数,且 $V(x)$在 $\|x\| \leqslant h$ 上连续可微,$\langle \nabla V, f \rangle = v(x)$,则 $v(x)$常负(正)时,$\dot{x} = f(x)$零解稳定,$v(x)$定负(正)时,$\dot{x} = f(x)$的零解渐近稳定,其中 $\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)$,$\langle \cdot, \cdot \rangle$表示向量点乘。

所谓 $V(x)$常正,指 $V(0) = 0, V(x) \geqslant 0, x \neq 0$;定正指 $V(0) = 0, V(x) > 0 (x \neq 0)$。

关于李雅普诺夫意义下的稳定性和伯克霍夫意义下的极限集的表现形式是多姿多彩的,1934 年意大利数学家狄盖尔(E. Digel)研究了下面 3 个有名的实例:

$$(1) \begin{cases} \dot{x} = -x\rho^4 - y\rho^2\cos\rho^{-1} - y\rho^3\sin\rho^{-1}, \rho > 0 \\ \dot{y} = -y\rho^4 + x\rho^2\cos\rho^{-1} + x\rho^3\sin\rho^{-1}, \rho > 0 \\ \dot{x} = \dot{y} = 0, \rho = 0 \end{cases}$$

其中 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$,他引人极坐标得出此方程组的解为

$$\begin{cases} \theta(\rho) = \rho^{-1}\sin\rho^{-1} + c_1 \\ \rho(t) = \sqrt[4]{\frac{1}{4(t + c_2)}} \end{cases}$$

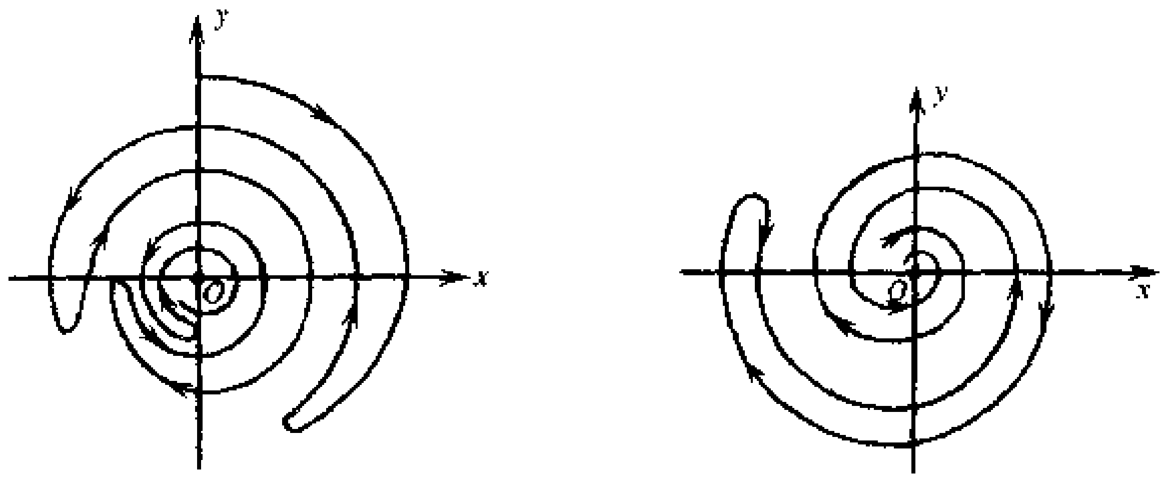
相图如图 7.1(a)所示。

零解是李雅普诺夫渐近稳定的，O 点是奇点，轨线的 ω 极限点集，由一个点 O 组成。

$$
(2)\begin{cases}\dot{x} = (2xy + y^2)\cos\ln\rho^{-1} + (y^2 - x^2 - xy)\sin\ln\rho^{-1}, \rho > 0\\ \dot{y} = (y^2 - x^2 - xy)\cos\ln\rho^{-1} + (x^2 - 2xy)\sin\ln\rho^{-1}, \rho > 0\\ \dot{x} = \dot{y} = 0, \rho = 0\end{cases}
$$

引入极坐标之后求得解为$\begin{cases}\rho(t) = c(1 + c^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\\ \theta(t) = \mathrm{arctg}(-ct) + \ln c^{-1}(1 + c^2t^2)^{\frac{1}{2}}\end{cases}$

相图如图 7.1(b)所示。



(a) (b)

图 7.1

零解是不稳定的，但{0}既是 ω 极限集又是 α 极限集。

$$
(3)\begin{cases}\dot{x} = 6x^2y^5\rho^6\sin^2\rho y^{-1} - 2x^2y^4\rho^7\sin\rho y^{-1}\cos\rho y^{-1} -\\ \qquad x\rho^{14} + 2xy^6\rho^7\sin^2\rho y^{-1} - xy^{12}\sin^4\rho y^{-1} - y\rho^{13}, y \neq 0\\ \dot{x} = -x^{15}, y = 0\\ \dot{y} = 6xy^6\rho^6\sin^2\rho y^{-1} - 2xy^5\rho^7\sin\rho y^{-1}\cos\rho y^{-1} -\\ \qquad y\rho^{14} + 2y^7\rho^7\sin^2\rho y^{-1} - y^3\sin^4\rho y^{-1} + x\rho^{13}, y \neq 0\\ \dot{y} = x^{14}, y = 0\end{cases}
$$

引入极坐标,求得$\begin{cases}\rho = \sin^6\theta\sin^2\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\right) \\ \rho = \sin^6\theta\sin^2\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\right) + \dfrac{1}{\theta - c},(\theta \neq c)\end{cases}$

相图如图 7.2,零解是不稳定的,它有无穷个"花瓣"组成的轨线 $\rho = \sin^6\theta\sin^2\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\right)$,"花瓣"的外边缘则是轨线 $\rho = \sin^6\theta\sin^2\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\right) + \dfrac{1}{\theta - c}$ 的 ω 极限集,这种极限集是庞加莱与班迪克逊所称的前述第 3 种极限集(奇点与当 $t \to +\infty, t \to -\infty$ 时趋于这些奇点的轨线组成)。

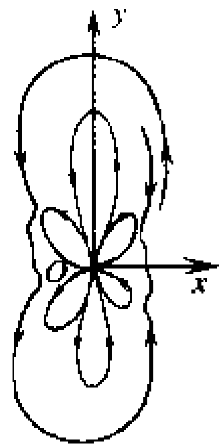


图 7.2

1900 年希尔伯特在巴黎国际数学家大会上提出的 23 个 20 世纪数学难题中,第 16 问题问

$$\begin{cases}\dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y)\end{cases}$$

最多能有多少极限环,其中 P 与 Q 是次数不超过 n 的多项式。对于 $n = 2$ 的情形,1957 年苏联数学家彼得罗夫斯基发表了一篇论文,结论说最多恰有 3 个极限环,从而宣布解决了第 16 问题中 $n = 2$ 的情形。1979 年,中国数学家陈兰荪、王明淑和史松龄分别独立地给出有 4 个极限环的实例:

$$\begin{cases}\dot{x} = -y - \delta_2 x - 3x^2 + (1 - \delta_1)xy + y^2 \\ \dot{y} = x\left(1 + \dfrac{2}{9}x - 3y\right)\end{cases}$$

其中 $0 < \delta_2 \ll \delta_1 \ll 1$ 是小参数。从而得出结论,二次系统的极限环最多者不少于 4 个,但是否存在超过 4 个极限环的 2 次系统,至今无人回答。希尔伯特第 16 问题构成对数学家的严峻挑战。

1937 年,苏联的力学家安德罗诺夫(А. А. Андронов)和数学家庞特列雅金(Pontrjagin)考虑二维自治系统

$$\begin{cases}\dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y)\end{cases} \tag{7.5}$$

作为某种实际变化的数学模型,是从实际中抽象出来的,它只是实际过程的一种近似,P 与 Q 的稍微波动,是否会使受扰系统

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) + p(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) + q(x,y) \end{cases} \tag{7.6}$$

轨线的拓扑结构发生实质性变化，这是十分关心的问题。他们创建了如下的所谓结构稳定性概念：

设 C 是 xy 平面上的光滑闭曲线，C 上的每点的切线与方程组(7.5)的方向场方向的夹角不是 0 与 π，P、Q，p，q 在 C 包围的区域 D 内连续可微，且任取 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|p(x,y)|<\delta$，$|q(x,y)|<\delta$，$|p_x(x,y)|<\delta$，$|q_x(x,y)|<\delta$，$|p_y(x,y)|<\delta$，$|q_y(x,y)|<\delta$ 时，存在拓扑变换 T，把 D 映射到自身，使得

(1) $M\in D$，则 $\rho(M,T(M))<\varepsilon$，$\rho(\cdot,\cdot)$表示两点距离；

(2) T 把系统(7.5)的轨线映射成系统(7.6)的轨线。

则称系统(7.5)是结构稳定的，或称其为粗系统。

安德罗诺夫和庞特列雅金还给出且严格证明了粗系统的充分必要条件是：

(1) D 内只有有限个奇点，皆初等奇点，且只是结点、鞍点或粗焦点。

(2) 只有有限条闭轨，皆单重极限环。

(3) 没有鞍点到鞍点的轨线。

所谓初等奇点(0,0)，即指系统的线性近似系统无零特征值；线性近似系统的焦点也是相应的非线性系统的焦点时，此焦点称为粗焦点。

$$\oint_{\Gamma} \mathrm{div}(P,Q)\mathrm{d}t \neq 0$$

时，极限环 Γ 称为单重极限环。

庞特列雅金(1908—1988)，生于莫斯科，其父做过会计，当过兵，其母是裁缝。庞特列雅金 13 岁那年，因一次爆炸事故双目失明，母亲希望他搞音乐，他却对数学着了迷。1925 年保送入莫斯科大学数学物理系。1934 年，庞特列雅金获博士学位，同年任命为莫斯科大学数学教授。1939 年，当选苏联科学院通讯院士，1958 年转为院士。1970 年担任国际数学家联盟副主席。

庞特列雅金的主要贡献在拓扑学和最优控制方面。发表拓扑学论文60多篇,出版《拓扑学基础》(1947)和《光滑流形及其在同伦论上的应用》(1952)两部专著。

在纯数学方面取得了令人仰慕的成就之后,庞特列雅金开始考虑数学的应用价值,他说:"我所作的一切究竟是为了什么?什么时候可以把维数同调理论用于技术物理或一般地用于我们周围的物质世界?"

1932年,一位素昧平生的年轻物理学家安德罗诺夫来到庞的住所,与庞讨论应用数学问题,从此开始了庞安20年的学术合作生涯。庞回忆说:"与他(指安)的结识及对我的影响使我放弃了自己一直从事的抽象问题的研究,而致力于数学的应用。"于是有了上面讲的微分方程结构稳定性的共同创造等重要成果。

从1952年起,庞特列雅金领导了安德罗诺夫振动理论的讨论班,讨论班有一条规矩,每次学术报告必须从某个技术问题讲起,再把它化成微分方程模型来加以研究。

在应用数学方面,庞的最大贡献是微分对策的最优化问题,1961年出版《最优过程的数学理论》。

由于庞特列雅金的突出成就,他多次获得苏联政府的大奖,1940年和1962年两次获国家级奖金,1966年获罗巴切夫斯基奖,3次获列宁勋章,1969年获社会主义劳动英雄金星奖章。当然,由于政治上的原因,庞特列雅金也有过不够正义不够清白的言行,例如1936年,在错误批判著名的苏联数学家H.H.鲁金的大会上,庞特列雅金带头作了言辞过激的批判发言。

3 偏微分方程

偏微分方程诞生于18世纪。19世纪和20世纪,偏微分方程得到了极其迅猛的发展,成为数学的中心学科之一。

1747年,法国数学家达朗贝尔(D'Alembert Jeanle Rond,1717—

1783)建立了弦振动方程

$$\frac{\partial^2 y}{\mathrm{d}t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

且得到了达朗贝尔公式

$$y(t, x) = \frac{1}{2}\varphi(at + x) + \frac{1}{2}\psi(at - x)$$

其中 φ 与 ψ 是任意的二次可微函数。接着引起丹尼尔·伯努利、欧拉等人对弦振动的深入研究，他们考虑了边界条件和初始条件，研究柯西问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty), t \in (0, +\infty) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

得出解的公式(现仍称其为达朗贝尔公式)

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

达朗贝尔生于巴黎，出生即被遗弃，由一位玻璃匠拾得后收养成人。早年学习法学和医学，后改学数学。1741 年当选法国科学院院士，1754 年当选法兰西学院院士，1772 年任法兰西学院终身秘书。他在数学、力学、天文学等诸多方面都有杰出贡献，例如，在 1743 年出版的《论动力学》一书中提出"达朗贝尔原理"，他是复变函数论的先驱者之一。1760 年以后，达朗贝尔陆续出版了 8 卷本《数学论丛》，是他主要成果的选集。达朗贝尔是 18 世纪法国启蒙运动的代表人物之一。

1759 年，欧拉研究矩形鼓和球面波，建立了二维与三维波动方程。1752 年，在欧拉的论文中首次出现位势方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

后因拉普拉斯对位势方程的出色工作，现称位势方程为拉普拉斯

方程，简写成$\Delta V=0$。

拉普拉斯(Pierrer Simon Laplace，1749—1827)，被誉为“法国的牛顿”，生于法国诺曼底的一个农民家庭。16岁考入卡昂大学，19岁去巴黎拜见巴黎科学院领导人达朗贝尔，达朗贝尔给拉普拉斯出了一道题目来测试他，要他一周内交卷，结果第二天早上拉普拉斯就交出圆满的答案。达朗贝尔又出了一个关于“打结”的题目考拉普拉斯，拉普拉斯当即就给出了答案。达朗贝尔十分赏识拉普拉斯的才能，推荐他到科学院工作，无奈当时科学院保守势力甚大，不接受这位无学位的青年，达朗贝尔只好介绍拉普拉斯去军事学校当教员。到1773年，24岁的拉普拉斯已经发表《曲线的极大极小研究》和有关微分方程与天体力学等重要论文13篇而被科学院聘任，巴黎科学院执行秘书孔多塞(Condorcet)说：“巴黎科学院第一次接受这样年轻，并在这样短的时间内对多种难题写出重要论文的人。”进入科学院即当选为副院士。1785年当选为院士，成为当年数理科学当中贡献最大在科学史上最负盛名的科学家之一。是天体力学和分析概率的奠基人，应用数学的先驱，又是著名的物理学家。1796年，当选法兰西科学院院长。

1785年，拿破仑是巴黎军校学员，是拉普拉斯主讲的数学课的学生，1799年，拉普拉斯把他的名著《天体力学》送拿破仑，拿破仑十分高兴地说：“近6个月内较为空闲，我一定拜读。”拿破仑很快提名拉普拉斯出任法国内政部长，1803年，当选为议长，年薪10万法郎。

1806年，拿破仑授予拉普拉斯伯爵衔，1817年推翻拿破仑的路易十八由于拉普拉斯在科学上的巨大贡献，仍封拉普拉斯为侯爵。拉普拉斯是伦敦皇家学会和格丁根皇家学会会员，也是俄国、丹麦、瑞士、普鲁士、意大利等国科学院院士。

拉普拉斯一生研究了上百个课题，其中含有限差分方法、概率论、万有引力定律、彗星轨道、偏微分方程解法、常微分方程常数变易法(与拉格朗日独立发现)、拉普拉斯算子、人口论、生成函数、拉

普拉斯变换等。

拉普拉斯的代表作有《概率分析理论》(1812 年),《天体力学》(1799),《宇宙体系论》(1796)。1878 年—1912 年,出版了《拉普拉斯全集》14 卷。

拉普拉斯的遗嘱是:

"我知道的,是很少的;
我不知道的,是无限的。"

值得指出的是,拉普拉斯的政治品格未必像他在数学力学上的出色工作那样可敬,他先是主动与拿破仑结识,并得到拿破仑的封爵,荣获大十字勋章和骑士勋章。拿破仑失败后,拉普拉斯毫不犹豫地在拿破仑判决书上签了字,进而得到路易十八的重用。拿破仑在圣赫勒拿岛流放后说:"拉普拉斯是第一流的数学家,但事实很快表明他不过是一位平庸之辈,他从不认真对待任何事情,而是到处寻找可乘之机。"

到了 19 世纪,随着物理科学发展的不断深入,作为其数学模型的偏微分方程空前繁荣起来,众多数学家系统地研究各类偏微分方程古典解的存在唯一性和求解方法。这些研究大都是联系着相应的物理模型进行的,所以 19 世纪偏微分方程的内容也称为数学物理方程。

19 世纪打开偏微分方程研究热烈局面的第一人是法国数学家傅里叶。当时工业上要进行金属冶炼和热处理,迫切需要确定金属内部各点的温度如何随时间变化,傅里叶对这种热流动问题颇有兴趣。1807 年,傅里叶向巴黎科学院呈送了用数学研究热传导的论文,此文经拉格朗日、拉普拉斯和勒让德 3 位名人的审稿而被否定。1811 年,傅里叶把修改后的关于热传导的数学论文又呈送科学院,这一次得到了上述名人 3L 的肯定,并授予傅里叶高额奖金,但仍拒绝全文发表傅里叶的论文,审稿人批评傅里叶的文章缺乏严密性。

事实上,傅里叶考虑到吸收和释放热量的物体内部温度分布是不均匀的,温度 T 是时间与地点的函数 $T(x,y,z,t)$,他对均匀

的各向同性的物体得出 T 满足的方程

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=k^2\frac{\partial T}{\partial t}$$

其中 k^2 是常数，其值依赖于物质的质料。

傅里叶的研究从侧面绝热的杆状物的内部热传导开始，建立了定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}=k^2\dfrac{\partial T}{\partial t},\ 0<x<l,0<t<+\infty\\ T(0,t)=0,T(l,t)=0,0<t<+\infty\\ T(x,0)=f(x),0\leqslant x\leqslant l\end{cases}$$

傅里叶创立了所谓分离变量法，他令

$$T(x,t)=\phi(x)\psi(t)$$

代入方程得

$$\frac{\phi''(x)}{k^2\phi(x)}=\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}$$

他阐明上式是一个常数 $-\lambda$，于是得

$$\phi''(x)+\lambda k^2\phi(x)=0$$

$$\psi'(t)+\lambda\psi(t)=0$$

$$\phi(0)=0,\ \phi(l)=0$$

解得

$$\phi(x)=b\sin(\sqrt{\lambda}kx+c)$$

$$\phi(0)=b\sin c=0,c=0$$

由条件 $\phi(l)=0$ 得　$\sin\sqrt{\lambda}kl=0$，于是 λ 可以取的值为

$$\lambda_\nu=\left(\frac{\nu\pi}{kl}\right)^2,\nu\text{ 为整数}$$

这些 λ_ν 就是现在我们在数理方程教科书中所称的特征值或本征值。

进而得

$$T_\nu(x,t) = b_\nu e^{-\frac{\nu^2\pi^2}{k^2l^2}t}\sin\frac{\nu\pi x}{l}, \quad \nu = 1,2,\cdots$$

由于方程是线性齐次的，所以诸解之和仍为解，于是傅里叶断言所求的温度函数为

$$T(x,t) = \sum_{\nu=1}^{+\infty} b_\nu e^{-\frac{\nu^2\pi^2}{k^2l^2}t}\sin\frac{\nu\pi x}{l}$$

当 $t=0$ 时，$T(x,0)=f(x)$，于是得出

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sin\frac{\nu\pi x}{l}$$

以上这些运算是傅里叶按 18 世纪数学物理界的风气形式地进行的，他作为一个严肃的数学家，立刻意识到下面两个问题：

(1) $f(x)$真的能表示成三角级数吗？

(2) 系数 b_ν 如何确定？

为了解决这些问题，傅里叶如下进行运算(取 $l=\pi$)：

$$\sin\nu x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\nu^{2n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}$$

然后未加证明地交换求和顺序，得

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{2n-1}b_\nu\Big)x^{2n-1} \tag{7.7}$$

如此把 $f(x)$表成了 x 的幂级数，即这个幂级数是 $f(x)$的马克劳林级数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k \tag{7.8}$$

令式(7.7)与式(7.8)中同次幂的系数相等，傅里叶发现

$$f^{(k)}(0) = 0,\ k \text{ 是偶数}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{2n-1}b_\nu = (-1)^{n-1}f^{(2n-1)}(0),\ n = 1,2,3,\cdots$$

于是欲确定的$\{b_\nu\}$是无穷线性代数方程组中未知数的无穷集合

傅里叶的工作确实有局限性,他假设了函数 $f(x)$ 有无穷阶导数。他虽然也得出

$$b_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(s)\sin\nu s\,ds \qquad (7.9)$$

但并未给出严格的论证,公式(7.9)欧拉早已得到,并且比傅里叶的方法简单。

当时傅里叶观察到,式(7.9)的右端是曲线 $\frac{2}{\pi}f(x)\cdot\sin\nu x$ 下方从 0 到 π 的面积,这样的面积对随便的函数 $f(x)$ 都可以有意义,甚至这种函数不必连续,于是当时傅里叶错下结论说:

每个函数 $f(x)$ 皆可表成

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sin\nu x, 0 < x < \pi \qquad (7.10)$$

他未给此结论任何证明,除丹尼尔·伯努利之外,几乎当时所有的数学家都不信傅里叶的话。

傅里叶选择了大批函数,对每个函数计算相应的 b_ν,且做出每个函数的式(7.10)级数头几项的图像与 $f(x)$ 相比较,他从实际的计算中也亲眼看到,不管 $(0,\pi)$ 以外怎样,级数(7.10)在 $(0,\pi)$ 内总是表示 $f(x)$ 的,但他也明智地指出,$f(x)$ 与其级数(7.10)只在 $(0,\pi)$ 内一致,在 $(0,\pi)$ 以外可以不相等。

接着傅里叶研究了任何函数 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 的三角级数表达式,得出

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x + b_\nu\sin\nu x) \qquad (7.11)$$

其中

$$\begin{cases} a_\nu = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\nu x\,dx \\ b_\nu = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\nu x\,dx \end{cases}$$

其实此公式早由克莱洛(Clairaut)和欧拉得到过。

傅里叶对"任意"函数可以表成式(7.11)形的三角级数一事

从未给出任何完全的证明，没有指出函数可以展成三角级数的条件，他坚持说，不管 $f(x)$ 怎样，不管是否给 $f(x)$ 以解析表达式，他的级数总是收敛的。傅里叶关于任何函数可以展开为三角级数的信念是建立在前述他多次实验具体的函数展开的几何证据之上的，他为自己辩护说："没有什么比几何图形对我们更适宜的了。"

拉格朗日对"任何函数可以展开成三角级数"的结论坚决否认，批评了傅里叶立论缺乏严密性。

1829 年，德国数学家狄利克雷严格证明了关于傅里叶三角级数收敛的狄利克雷定理：

若 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，且在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点，且至多有有限个极值点，则傅里叶级数收敛，且

(1) 当 x 是 $f(x)$ 的连续点时，级数收敛到 $f(x)$。

(2) 当 x 是 $f(x)$ 的第一类间断点时，级数收敛到 $\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$。

傅里叶(Jean Bapliste Joseph Fourier, 1768—1830)，生于法国奥色尔，8 岁失去父母，被教堂收养。在一个军事学校上学，后考入巴黎高等师范学校，毕业后在巴黎工科大学做拉格朗日与蒙日的助教。1798 年随拿破仑远征埃及，负责拿破仑军与南埃及当权者谈判，作外交事务，此期间他利用余暇时间研究数学物理。1801 年，拿破仑看中傅里叶的管理才能，派他到法意边境伊泽尔任行政长官，被拿破仑封为男爵。在任期间他抽时间研究了热传导问题，1814 年离任。

1822 年，傅里叶担任巴黎科学院终身秘书，1827 年任法兰西学院终身秘书。1822 年写成《热的解析理论》这一数学经典著作。1824 年—1826 年，把 1811 年未予发表的那篇关于热传导的论文原封不动地发表在科学院《报告》中。

傅里叶一生勇于助人，忠实诚挚，为学术界广为称道，例如

他在雅各宾派专政时期，冒着“恐怖主义”保护一些学者而被捕入狱，因不满拿破仑的专制而弃官。发现巴黎科学院埋没阿贝尔的天才，以秘书的身份表示内疚、并把科学大奖补发给阿贝尔。他的数学成就和为人深受世人的敬仰，第二次世界大战期间，纳粹士兵把奥色尔市的傅里叶铜像熔化，奥色尔人民制成了铜像的浮雕，战后镶嵌在市府大厅中，1968 年，法国举行了纪念傅里叶诞生 200 周年大会。

19 世纪另两位对数学物理方程有重要贡献的法国数学家是泊松（Poisson Simeon Denis，1781—1840）和拉普拉斯，他们也研究热传导问题，当物体内部的温度分布趋于稳定状态，已与时间无关时，于是三维热传导方程就变成了位势方程或称拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

这个方程是 1813 年拉普拉斯首先研究的，所以亦称拉普拉斯方程。在电磁学与重力吸引等物理问题当中也遇到了这个方程和所谓泊松方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-4\pi\rho$$

英国数学家格林给出了关于拉普拉斯算子 Δ 的所谓格林公式（$U(x,y,z)$与 $V(x,y,z)$及 $\Delta U,\Delta V$ 连续）：

$$\iiint U\Delta V\mathrm{d}v+\iint U\frac{\partial V}{\partial n}\mathrm{d}\sigma=\iiint V\Delta U\mathrm{d}v+\iint V\frac{\partial U}{\partial n}\mathrm{d}\sigma$$

其中 n 是物体表面的内法线，$\iiint$ 是在物体上的三重积分，$\iint$ 是沿物体表面的曲面积分。这个公式俄国数学家奥斯特洛格拉德斯基（M. Ostrogradsky，1801—1861）也得出过。

格林进一步导出格林函数概念与拉普拉斯方程的求解公式：

$$4\pi V=-\iint\bar{V}\frac{\partial U}{\partial n}\mathrm{d}\sigma$$

其中 $\bar{V}$ 是 V 的边界值，U 称为格林函数。U 满足下述条件：① U 在物体表面为零；② U 在内部某点变成无穷；③ U 满足拉普拉斯方程 $\Delta U=0$。

格林（Green George，1793—1841）是英国充满神奇色彩的数学家，40 岁前是磨坊工人，自学数学，40 岁才被推荐入剑桥大学学习。他的第一篇论文《数学分析在电磁理论中的应用》完成于 1828 年，去世后（1850 年）才得以发表，文中的格林函数与格林定理对位势理论起了奠基作用，他的数学物理方面的工作，孕育了剑桥数学物理学派。

1808 年—1819 年，泊松研究了波动方程的初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=a^{-2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\ u(x,y,z,0)=\phi_0(x,y,z)\\ u_t(x,y,z,0)=\phi_1(x,y,z)\end{cases}$$

其中 a 是非零常数，他得到解

$$\begin{aligned}u(x,y,z,t)=&\frac{1}{4\pi a}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\phi_1(x+at\sin\phi\cos\theta,y+at\sin\phi\sin\theta,\\&z+at\cos\phi)at\sin\phi\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi+\\&\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\phi_0(x+at\sin\phi\cos\theta,y+at\sin\phi\sin\theta,\\&z+at\cos\phi)at\sin\phi\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\end{aligned}$$

其中 θ,ϕ 是球坐标量，积分区域是以 $P(x,y,z)$ 点为中心以 at 为半径的球 S_{at} 的表面。

1858 年，黎曼给出波动方程的一种高明的解法，他研究如下的二阶线性方程

$$L(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=0 \qquad (7.12)$$

其中 D,E,F 是 x,y 的二阶可微函数，他要解决的问题是已知 u

与$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$在曲线$\Gamma$上的值时，如何求得任一点 P 处的 u 值，见图 7.3。

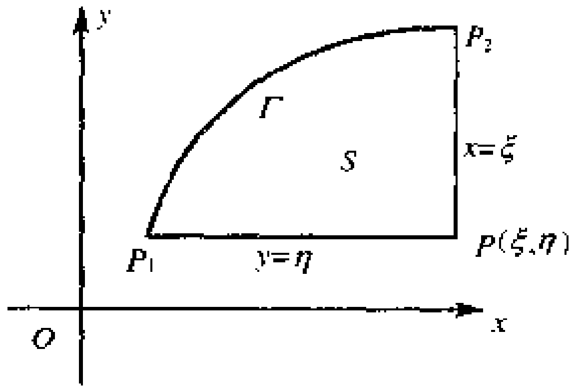


图 7.3

黎曼构作了式(7.12)的共轭方程

$$M(v)=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial(Dv)}{\partial x}-\frac{\partial(Ev)}{\partial y}+Fv=0 \qquad (7.13)$$

如果 $v(x,y)$满足方程(7.13)，且满足

① 在 P 点 $v=1$；②在 $x=\xi$ 上$\frac{\partial v}{\partial y}-Dv=0$；③在 $y=\eta$ 上，$\frac{\partial v}{\partial x}-Ev=0$。记

$$X=\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)+Duv$$

$$Y=\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+Euv$$

则有格林公式

$$\int_S[vL(u)-uM(v)]\mathrm{d}S=\int_S\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\mathrm{d}s=$$

$$\int_C\{X\cos(n,x)+Y\cos(n,y)\}\mathrm{d}s$$

其中 S 是图(7.3)中的区域，C 是 S 的边界，$\cos(n,x)$是 C 的法线方向与 x 轴夹角的余弦。于是黎曼得出

$$u(\xi,\eta)=\int_{\Gamma}\{X\cos(n,x)+Y\cos(n,y)\}\mathrm{d}s+$$
$$\frac{1}{2}\{(uv)_{P_1}+(uv)_{P_2}\}$$

为算出 u，必须求出 v，但求 v 通常比求 u 容易，这正是黎曼方法的妙处。

1860 年，德国数学家亥姆霍兹(Hermann Von Helmholtz，1821—1894)研究一端开放的管道内的空气振动(例如风琴管)，他考虑谐振动的气体的速度，把 $u=w(x,y,z)e^{ikt}$ 代入三维波动方程得出现在所称的亥姆霍兹方程：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+k^2 w=0$$

他得到解

$$w(P)=-\frac{1}{4\pi}\iint\frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}s+\frac{1}{4\pi}\iint w\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)\mathrm{d}s$$

其中 r 表示 P 点到边界上动点的距离，于是区域内任一点 P 的 w 值由边界上的 w 与$\frac{\partial w}{\partial n}$的值算出。

德国的另一位 19 世纪的伟大数学物理学家克希霍夫(Gustav Kirchhoff，1824—1887)借助于亥姆霍兹的工作求得波动方程$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\Delta u$ 的柯西问题的解为

$$u(P,t)=-\frac{1}{4\pi}\iint\frac{f\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}\mathrm{d}s+\frac{1}{4\pi}\iint\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\phi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}\right)\mathrm{d}s$$

其中 $\phi(\tau)$是 u 在时刻 τ 时边界上任一点(x,y,z)处的值，$f(\tau)$是$\frac{\partial u}{\partial n}$相应的值。

从公式中看出，P 点 u 的值用 u 与$\frac{\partial u}{\partial n}$在较早时刻围绕 P 点的闭曲面上的值表示，这一结果声学上称为惠更斯原理。

19 世纪偏微分方程的另一重要工作是对方程组的研究。

1827 年，法国力学家纳维（Claude L. M. H. Navier，1785—1836），1845 年英国剑桥数学物理学派代表人物斯托克斯（Stokes George Gabriel，1819—1903）分别独立地建立了粘性介质中流体运动的数学模型——Navier-Stokes 方程组

$$
\begin{cases}
\rho \dfrac{Du}{Dt} = \rho X - \dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{1}{3}\mu \dfrac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u \\
\rho \dfrac{Dv}{Dt} = \rho Y - \dfrac{\partial p}{\partial y} + \dfrac{1}{3}\mu \dfrac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v \\
\rho \dfrac{Dw}{Dt} = \rho Z - \dfrac{\partial p}{\partial z} + \dfrac{1}{3}\mu \dfrac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta w \\
\theta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}
\end{cases}
$$

其中 ρ 是流体密度；p 是压力；$u(x,y,z,t)$，$v(x,y,z,t)$，$w(x,y,z,t)$是流体在(x,y,z)点时刻 t 的流速分量；X,Y,Z 是外力分量；μ 是粘性系数；对不可压流体，$\theta = 0$。$\dfrac{Du}{Dt} = \dfrac{\partial u}{\partial x}u + \dfrac{\partial u}{\partial y}v + \dfrac{\partial u}{\partial z}w + \dfrac{\partial u}{\partial t}$，$\dfrac{Dv}{Dt}$，$\dfrac{Dw}{Dt}$与$\dfrac{Du}{Dt}$相似。

1829 年，泊松也曾建立过这一方程组。

研究弹性体的振动，1828 年，柯西建立了下面方程组

$$
\begin{cases}
(\lambda + \mu)\dfrac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u = \rho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
(\lambda + \mu)\dfrac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v = \rho \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\
(\lambda + \mu)\dfrac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta w = \rho \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\
\theta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}
\end{cases}
$$

其中，u,v,w 是位移分量；θ 是膨胀系数。

19 世纪最为重大的数学模型是麦克斯韦（Maxwell）在先辈法

拉第(Faraday)关于电磁研究的基础上建立的麦克斯韦方程组

$$\begin{cases}\mathrm{curl}\boldsymbol{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial(\epsilon\boldsymbol{E})}{\partial t}\\ \mathrm{curl}\boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial(\mu\boldsymbol{H})}{\partial t}\\ \mathrm{div}\epsilon\boldsymbol{E} = \rho\\ \mathrm{div}\mu\boldsymbol{H} = 0\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 是电场强度向量；$\boldsymbol{H}$ 是磁场强度向量；ϵ 是介电系数；μ 是介质磁通率；ρ 是电荷密度。

通过这个方程组的研究，麦克斯韦做出人类科学史上最重大的结论之一：电磁波以光速通过空间，光是电磁现象。这些了不起的成果证明偏微分方程对于现代自然科学是何等的重要。

18 世纪、19 世纪，数学家们发明了很多关于偏微分方程的解法或求解公式，但人们很快就发现，正如代数方程 5 次以上者就找不到根式解一样，大多数偏微分方程是无法找到精确解法的，于是像高斯转而去证明代数方程根的存在性或柯西与皮亚拿等人去证明常微分方程定解问题的解的存在性一样，从 19 世纪开始，数学家们开始研究偏微分方程解的存在唯一性。

解的适定性的证明可以保证对方程的数值解或近似解的寻求不是徒劳的，还可以让人明白何种定解条件可以保证定解问题有唯一解，还会使人得知解是否随定解条件连续地变动或者当定解条件稍有变化时解会产生巨大的改变！

1842 年柯西把阶数大于 1 的偏微分方程化为偏微分方程组，证明了微分方程组解的存在性。1875 年柯瓦列夫斯卡雅独立地证明了方程组柯西问题的存在唯一性定理（今称 Cauchy-Kowalewsky 定理）：

设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,p_2,\cdots,p_n)$ 在点 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,u^0,p_2^0,\cdots,p_n^0)$ 的某一邻域解析，$\phi(x_2,x_3,\cdots,x_n)$ 在点 $(x_2^0,x_3^0,\cdots,x_n^0)$ 的某邻域解析，则柯西问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = f(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, p_2, p_3, \cdots, p_n), p_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}, i = 2, \cdots, n \\ u\Big|_{x_1 = x_1^0} = \varphi(x_2, \cdots, x_n)\end{cases}$$

在$(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$点的某个邻域存在唯一解。

对于方程组的柯西问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^{m_i} u_i}{\partial t^{m_i}} = F_i(t, x, u_1, u_2, \cdots, u_N, \cdots, D_t^k D_x^\alpha u_j, \cdots), i, j = 1, 2, \cdots, N \\ \dfrac{\partial^{k_i} u_i}{\partial t^{k_i}}\Big|_{t = t_0} = \varphi_i^{(k_i)}(x), k_i = 0, 1, \cdots, m_i - 1, i = 1, 2, \cdots, N\end{cases}$$

其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$是 n 维点，$\varphi_i^{(k_i)}(x), i = 1, 2, \cdots, N$，在 x_0 点某邻域内解析，$k_i = 0, 1, 2, \cdots, m_i - 1$；$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$，$k$ 是非负整数，$|\alpha| + k \leqslant m_i$，$D_t^k = \dfrac{\partial^k}{\partial t^k}$，$D_x^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$，$F_i$ 在点$(t_0, x_0, \cdots, D_x^\alpha \varphi_i^{(ki)}(x_0), \cdots)$的某邻域内解析，则此柯西问题在点$(t_0, x_0)$的某邻域存在唯一的解析解。

索非·柯瓦列夫斯卡雅(Sophie Kowalewsky,1850—1891)是人类历史上第一位科学院女院士，生于俄国莫斯科。当时俄国处于农奴制社会，沙皇政府歧视妇女，女孩子没有上学的权利，柯瓦列夫斯卡雅只得自学。她自修完全部高中课程之后，报考彼得堡大学的志愿无权实现，在家里继续自学高等数学。

听说当时西欧可以招收少量女生入大学，柯瓦列夫斯卡雅便与一位叫做弗拉基米尔·柯瓦列夫斯基的志同道合者于 1868 年 9 月举行了假“婚礼”，以夫妻名义伴同弗拉基米尔一起出国。这位假丈夫并非等闲之辈，他是莫斯科大学生物系的高材生，毕业后去欧洲深造。到了欧洲，柯瓦列夫斯卡雅考入德国海德堡大学，5 年后，这对传奇式的假夫妻举行了正式合法的婚礼，结为美满伉俪。

1870 年 8 月，柯瓦列夫斯卡雅出于仰慕外尔斯特拉斯的盛名，决心去柏林大学做外尔斯特拉斯的学生。但当时柏林大学规

定拒收女生，外尔斯特拉斯经严格测试，发现柯瓦列夫斯卡雅确有天赋，便决定在自己的家里单独教授这位异国的女学生。经过4年老师认真地教与学生发奋地学，柯瓦列夫斯卡雅不仅修完当时柏林大学数学专业的一切课程，还完成了3篇重要论文，这3篇论文中任取一篇都可以使她获得数学家的称号，当时她不满24岁。第一篇论文《偏微分方程论》，把柯西提出的偏微分方程解的存在唯一性定理推广到高阶的情形，即现在所称的柯西—柯瓦列夫斯卡雅定理，此定理乃偏微分方程的基本定理；另两篇是关于阿贝尔积分和土星光环的。1874年，格丁根大学授予她博士学位，这是数学史上第一位女博士。1884年，受聘任瑞典斯德哥尔摩大学教授，1889年，当选俄国科学院通讯院士，她的关于刚体转动的论文荣获巴黎科学院鲍廷奖。

当时法国巴黎科学院以"鲍廷(Prix Bordin)奖金"3次悬赏求解所谓"百年水妖"的数学难题——刚体绕定点转动问题的解，百年无人解决，柯瓦列夫斯卡雅投送的论文成功地解决了这一问题。由于她的文章水平之高超出了预期的要求，奖金由3000法郎提升到5000法郎。她在文章中显示的难能可贵的高超解法，使整个欧洲科学界为之轰动。在该论文的密封式封面上，柯瓦列夫斯卡雅只签署了她的名言：

"说你知道的话，
做你应做的事，
成为你想做的人。"

巴黎科学院院长皮埃尔·杨森评价柯瓦列夫斯卡雅说："当今最辉煌、最难得的荣誉的桂冠，落在一位女孩子头上。本科学院的成员们发现，她的工作不仅证明她拥有广博深刻的科学知识，而且显示了她巨大的创造性才智。"

柯瓦列夫斯卡雅不仅是一位杰出的数学家，而且又是一位文笔隽秀的小说家，她的小说《童年的回忆》、《一个女虚无主义者》以及剧本《为幸福而斗争》译成各种文字，流传至今，反映了她的民主主义思想。

1891年,年仅41岁的女才子柯瓦列夫斯卡雅因肺炎英年早逝,确为世界数学界的重大损失。

1948年,《柯瓦列夫斯卡雅全集》出版,1950年,莫斯科和斯德哥尔摩分别举行隆重纪念大会,纪念柯瓦列夫斯卡雅诞辰100周年。

进入20世纪,偏微分方程的研究重点转向非线性问题,并且引入拓扑学上的不动点理论和泛函方法,不但研究古典解,而且研究广义解,尤其是从20世纪50年代以后,这方面硕果累累。

对所谓"孤立子"的研究是现代偏微分方程的重要课题。1834年,英国工程师拉塞尔(S.Russell)看见运河中一个滚圆面平滑的、轮廓分明的巨大孤立波峰,迅速离开船头,向远方推行,他赶紧纵马在岸边追踪观察,发现此波峰在足够长的时间内始终朝一个方向推进,且其形状与速度并无显著变化。1895年,荷兰数学家Korteneg,D.J和法国数学家德弗里斯(G.de Vries)对拉塞尔看到的现象建立了所谓KdV方程作为其数学模型

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{2}\eta^2+\frac{2}{3}\alpha\eta+\frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right\},$$

其中x是沿河道的坐标;$\eta(x,t)$是波峰高度;l是水深;g是重力加速度;α,σ是物理常数。

但由于此方程数学上的难度,使得KdV方程历经半个世纪无大进展,到1960年,加德纳(C.S.Gardner)等人发现KdV方程可以作为非线线科学中许多实际模型的数学模型,从而重新引起数学界的重视,例如光纤通信中的传输波、神经脉冲的传导等都可由KdV方程来近似描述。

1965年,美国的克鲁斯卡尔(M.D.Kruskal)和扎布斯基(N.J.Zabusky)在计算机上模拟了这种波的互相碰撞后仍然不会改变各自的形状,于是称其为"孤立子"(Soliton)。它这种叠加不变性出乎人们的预料,一般而言,线性系统才有叠加原理,对于非线性系统不敢相信会有叠加原理。它告诫我们,对非线性系统的研究要格外细致,它蕴含的规律性往往是十分离奇的,非线性系统中什么

怪事都可能发生。

1967 年,加德纳等人提出了求解 KdV 方程的"反散射"方法,而且用这种方法还可求解其他方程,例如塞因—戈登方程

$$u_{xt} = \sin u$$

1954 年—1962 年,中国数学家周毓麟和苏联数学家奥莲尼克(О. А. Олейник)、格列可夫(А. В. Греков)、菲里波夫(А. Ф. Филипов)和拉德仁斯卡雅(О. А. Ладыженская)成功地研究了拟线性抛物型方程的柯西问题和第一边值问题

$$\begin{cases} u_t = a(x,t,u)u_{xx} + f(x,t,u,u_x), (x,t) \in H \\ u\big|_{t=0} = \psi(x), \qquad x \in (-\infty, +\infty) \end{cases}$$

其中 $H = \{-\infty < x < +\infty, 0 < t \leqslant T\}$。

$$\begin{cases} u_t = a(x,t,u)u_{xx} + f(x,t,u,u_x), \ (x,t) \in D \\ u\big|_{x=0} = \psi_1(t), u\big|_{x=X} = \psi_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \\ u\big|_{t=0} = \psi(x), x \in [0, X] \end{cases}$$

其中 $D = \{0 < x < X, 0 < t \leqslant T\}$。

他们用 Schauder 和 Бернштейн 的先验估计方法、闸函数方法和 Röthe 的切片法,根据 Leray-Schauder 不动点定理证明了上述定解问题古典解的存在性。

把区间$[0, T]$用分点 $nh\left(n = 1, 2, \cdots, \left[\frac{T}{h}\right]\right)$分割成长为 h 的若干小区间,对每个 n,作未知函数 $u_n(x)$满足的常微分方程边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{u_n(x) - u_{n-1}(x)}{h} = a(x, t_n, u_n(x))u''_n(x) + f(x, t_n, u_n(x), u'_n(x)) \\ u_n(0) = \psi_1(t_n), \quad u_n(X) = \psi_2(t_n) \\ u_0(x) = \psi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant X \end{cases}$$

其中 $t_n = nh$,用 Leray-Schauder 不动点定理证明此常微分方程边值

问题的解 $u_n(x)$存在唯一,再令分割无限加密而使得 $u_n(x)$的线性拓展的极限函数即为拟线性抛物型方程边值问题的古典解。

上述工作的关键是把非线性方程化成算子方程,再引用 19 世纪 30 年代 Leray 与 Schauder(波兰数学家)建立的 Leray-Schauder 不动点定理:

算子方程 $x - T_k x = 0, k \in [a, b]$满足:

(1) 对$\forall k \in [a, b]$, T_k 是 Banach 空间 E 到自身的全连续算子,在 E 的每个有界集上,T_k 对 k 连续(对 x 一致)。

(2) 在 E 的范数之下,若有解,则解先验地在 E 中对 k 一致有界。

(3) $\exists k_0 \in [a, b]$,使得 $T_{k_0} x \equiv x_0, x_0 \in E$,则对每个 $k \in [a, b]$, $x - T_k x = 0$ 至少有一个解。

这是偏微分方程与泛函分析当中的最重要最有用的定理之一。

第八章　《几何原本》与反欧几何

19世纪最富有启发性和最值得注意的成就是非欧几里得几何的发现。

——希尔伯特

1　《几何原本》

《几何原本》是古希腊数学家欧几里得(Euclid,公元前330年—公元前275年)公元前300年左右之大作,是由公理方法建立的演绎数学体系的最早典籍,至今流传最为广泛,影响最为深远的一部世界级数学名著,是数学演绎证明的精彩画卷,全人类的教科书,数学家的启蒙课本。

《几何原本》共15卷,最后两卷有人认为不一定是欧几里得所写(它的卷相当于"章")。

卷一中有5条公设(几何公理):

(1) 从每个点到每个别的点可以引直线。

(2) 有限的直线可以沿着直线连续地延长。

(3) 以任一点为中心可以用任意半径画圆。

(4) 所有直角都相等。

(5) 如果一条直线与另外两条直线相交,在一侧构成两个同侧内角之和小于两直角,那么这两条直线无限延长时,就在同侧内角和小于两直角的那一侧相交。

卷一中还有9条公理:

(1) 等于同一个量的量彼此相等。

(2) 等量加等量其和相等。

(3) 等量减等量其差相等。

(4) 互相重合的量彼此相等。

(5) 全体大于部分。

(6) 不等量加等量其和不等。

(7) 等量的两倍其和相等。

(8) 等量的一半彼此相等。

(9) 两条直线不能包围空间。

(6)~(9)这4条公理是否为欧几里得所建,尚无定论。

下面摘要展示《几何原本》中的部分内容。

在第一卷中有23个定义:

(1) 点是没有部分的东西。

(2) 线有长度没有宽度。

(3) 线的各端是点。

(4) 直线是这样的线,它关于在其上所有点的位置是相等的。

(5) 面只有长度和宽度。

(6) 面的边缘是线。

(7) 平面是这样的面,它关于在其上所有直线的位置是相等的。

还定义了角、平角、直角、钝角、锐角、圆、圆心和直径。

(13) 界是任何东西的尽头。

(14) 图形是这样的东西,它含于某件东西的内部,或含于某些界的内部。

(15) 圆是这样的平面图形,它包含于一条曲线(把它叫做圆周)的内部,从图形内部某点到这条曲线上(在圆的圆周上)所有的点的直线彼此相等。

(20) 三边的图形中,等边三角形是有3个相等的边的图形;等腰三角形只有两个相等的边;不等边三角形有3个不相等的边。

(22) 四边的图形中,正方形是边都相等,角都是直角的图形;非正方形的矩形的角都是直角,但是它的边不都相等;菱形的边相等,但它的角不是直角;长菱形(平行四边形)对边相等,对角相等,

但是它的边不都相等,它的角不是直角。其余的四边形叫做梯形。

(23) 平行线是这样一些直线,它们在一个平面上,且两侧无限制地延长时,在任何一侧彼此都不相遇。

卷一中给出了48个命题及其证明。

命题1 在已知的有限直线上作一个等边三角形。

为了展示《几何原本》的风格,我们摘录此题的全部论证:

设已知有限直线为*AB*(见图8.1),以*A*为心,以*AB*为半径作圆*BCD*(公设(3)),再以*B*为心以*BA*为半径作圆*ACE*(公设(3)),我们从两题交点*C*引出连接点*A*与点*B*的直线*CA*,*CB*(公设(1))。

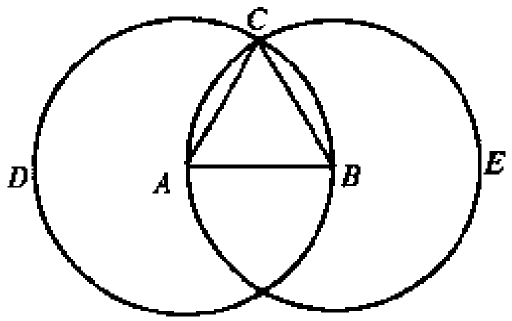


图8.1

因为*A*是圆*BCD*的心,所以*AC*等于*AB*(定义(15)),因为点*B*是圆*ACE*的心,所以*BC*等于*BA*(定义(15))。可是已经证得*AC*等于*AB*,这就是说*AC*与*BC*中每一个都等于*AB*,但等于同一个量的量彼此相等(公理(1)),这就是说*AC*等于*BC*。

这就是说*AC*,*AB*,*BC*三直线彼此相等,也就是说在已知的有限直线*AB*上作出的三角形*ABC*是等边的(定义(20)),这就是所求证的。

命题4 若两三角形的两边及其夹角对应相等,则两三角形相等。

命题5 等腰三角形两底角相等。

命题6是命题5的逆命题。

命题8 若两三角形的一边同它临近的两角对应相等,则两

三角形相等。

命题 16 一切三角形中，延长任一边所成的外角大于每个与它相对的内角。

命题 17 在一切三角形中，任何两角合在一起，都小于两个直角。

命题 27 如果一条直线与另外两条直线相交、所成的内错角相等，那么这两直线平行。

命题 28 如果一条直线与另外两条直线相交，所构成的外角等于在同侧与它相对的内角，或者所构成的同侧内角合在一起等于两个直角，那么这两条直线平行。

一直到命题 29，欧几里得才引用他的第五公设。看来他自己也在尽可能不用第五公设，也许他也感觉到第五公设会出问题。

命题 29 一条直线与两条平行直线相交，所构成的内错角相等。

从此命题证明开始用了第五公设。

命题 47 毕达哥拉斯定理。

命题 48 命题 47 的逆命题。

卷二中有两个定义和 14 个命题。

例如其中的命题 11 是黄金分割。

命题 11 划分已知线段成两线段，使得由整个直线及这两线段中的一个所包含而成的矩形等于其他一线段上的正方形。

命题 14 是作一个等于已知直线图形的正方形。

卷三中有 11 个定义和 37 个命题；论证圆周、弦、内接于圆的角、外切于圆的角和切线等基本性质。

卷四中有 7 个定义和 16 个命题；论证关于内接于圆和外切于圆的正三角形、正方形、正五边形、正六边形及正十五边形。

卷五中有 18 个定义和 25 个命题。

在第五卷欧几里得讲古希腊算术，他只讲到分数。

卷六中有 5 个定义和 33 个命题，结束了平面几何的讲述，谈的是面积比和相似形与比例理论。例如

命题 12 已知三直线，求第四比例项。

命题 13 求二已知直线的比例中项。

欧几里得把线段与数联系了起来，为日后笛卡儿的解析几何打下了古老的基础。

卷七中有 23 个定义 39 个命题。

定义 12 质数是只能用单位度量的数。

给出了求两个整数最大公约数的辗转相除法。

命题 23 如果两个数互质(素)，那么度量其中一个数的数.与其他一数互质。

命题 24 如果两个数与某一数互质，那么由它们(积)生成的数也与这个数互质。

命题 30 如果两数积可用某质数度量，则后者可度量两数中的一个。

命题 31 任一合数可用某质数度量。

命题 32 任一数或者为质数或者可用某质数度量。

从欧几里得的上述这些命题可以得出正整数分解成质因子唯一性定理。

卷八中有 27 个命题，没有定义。

在卷八中有这样一个定理：平方等于 2 的分数不存在以及关于立方的类似定理。

卷九证明了质数有无穷个：

命题 20 对于一切说得出数量的质数，有比它更大的质数存在。

卷九没有定义，有 36 个命题。

卷十中有 4 个定义，115 个命题，都是讲无理性的问题。在整个《几何原本》当中，这一卷是最难的；当时欧几里得不懂无理数。

定义 1 可以用同一量度量的量叫做可通约的量，不能有任何公共度量的量叫作不可通约量。

定义 3 我们称给出的直线为有理的，把与它无论是线性兼乘方的或只是乘方的可通约的直线叫做有理的，与它不可通约的

叫做无理的。

命题 1 对于两个给出的不等的量，如果从那个较大的量里取去大于它一半的量，再从所剩下的量里取去大于所剩下的量一半的量，如此继续下去，那么剩下的某个量将小于给出的那个较小的量。

命题 2 对于两个不等的量，交替地从较大的量减去较小的量，如果总是所剩下的量不能度量它前面被减去的量，那么所给出的两个量是不可通约的。

命题 6 如果两个量之间具有如同数对数一样的比，那么这两个量是可通约的。

命题 7 不可通约量之间没有如同数对数一样的比。

命题 8 如果两个量彼此之间没有如同数对数一样的比，那么这两个量是不可通约的。

卷十一，十二，十三讲的是立体几何。

卷十一中有 31 个定义和 40 个命题。包含球、圆锥、圆柱和五个正多面体的定义和研究空间中直线与直线、平面与平面、直线与平面位置关系的命题，还研究了等积的平行六面体的性质。

卷十二由 18 个命题组成。包括棱柱、棱锥和球的体积的命题。

命题 5 具有三角形的底和同一的高的两棱锥的比和它们的底的比相同。

命题 7 具有三角形底的棱柱可以划分成三个等积的三角形的棱锥。

卷十三有 18 个命题研究正多面体理论。

命题 13 作内接于已知球的正四面体。

命题 14 作内接于已知球的正八面体。

命题 15 作内接于已知球的立方体。

命题 16 作内接于已知球的正二十面体。

命题 17 作内接于已知球的正十二面体。

命题 18 求出以上诸命题中所考虑的 5 种多面体的边。

欧几里得给出了以上各题的作图法且给出了作法正确性的证明。

欧几里得指出，把求证的事当作已知，然后以导出的结果为基础，使得命题得证的方法叫做“解析法”，反之，借助于已知的真理得出求证的事物，称为“综合法”。

在卷十三中欧几里得把他定义的解析法与综合法有效地应用于几何证明。

卷十四中有 7 个命题，讨论正多面体的性质。

卷十五有 7 个关于一个正多面体内接于另一个正多面体的问题，例如：

命题 5 在已知的正二十面体中作内接正十二面体。

据史书记载，欧几里得的著作尚有《论圆锥截线》四卷，《论曲线位置》两卷，《不定条件的命题》和《论错误的结论》等，现皆已失传。

《几何原本》在人类科学发展的历史当中是第一座理论体系的丰碑，它确立了科学论证的演绎模式，它要求每个命题必须是已经建立的一些命题的逻辑结论，而这种推理系统的出发点则是一些最基本的定义和被公认的不证自明的所谓公理，现代的全部数学都是继承了欧几里得《几何原本》的模式建立的。

古今几乎所有的伟大学者都学习过《几何原本》或《几何原本》的现代版本。事实上，现代的初等几何(中学教科书中的骨干内容之一)就是由《几何原本》用现代语言改写而成的。

《几何原本》中的概念与理论对自然科学和工程技术的直接或间接的应用是有目共睹的，例如建筑学、机械工程、光学、力学、物理等学科，都在大量引用初等几何的知识。

无庸讳言，《几何原本》的缺点也明显存在，我们看到，它的定义叙述不准确，例如卷一中的点、线、直线等，不但在后续的证明中没有起什么作用，而且表述也十分含糊。例如“直线是这样的线，它关于在其上所有点的位置是相等的”，“位置相等”让人如何理解？其他很多定义也都存在一些不够明确的毛病。当然，我们不

能苛求于古人,毕竟那是开创性的工作,没有欧几里得这些不太像样的定义,哪来的修改成现代表达方式的初等几何呢。

在理论上,《几何原本》也有严重的漏洞,例如卷一命题1,以 A 与 B 两点为中心以 AB 为半径的两圆为什么一定有交点 C? 在《几何原本》中没有理论依据。事实上,欧几里得没有建立连续公理,由于他手中没有连续公理,就说不清楚圆会不会在 C 点"断裂",使 C 点恰是圆上的一个"洞"而找不到两圆交点。

1872年,戴德金(Dedekind)建立了连续公理:

如果把直线上所有的点分成两类,使每一类都包含着点,而且第一类的点都在第二类每个点的同一侧,那么就存在着一个点,它把直线分成两个射线,第一类所有的点在其中的一个射线上,而第二类所有的点在另一射线上,把直线分成两个射线的点或者属于第一类,或者属于第二类。

在《几何原本》中某些公理可以被证出来,例如第(4)公设:"所有的直角都相等",20世纪初希尔伯特没有用连续公理就给出了第(4)公设的证明,此证明写入希尔伯特的名著《几何基础》中。

《几何原本》中一个最大的问题出在第(5)公设上。

这条公设不像其他的公设那么简明直观,可以不证自明,令人怀疑这个公设能不能用其他公理与定理推导出来。为什么欧几里得本人也尽可能晚些引用这条公设,把它安排在第29命题证明中才首次出现,是不是也有点犹豫?

开始时人们想把这一公设改造得更自然一些,令其不证自明,例如公元5世纪希腊数学家普罗克鲁斯和18世纪苏格兰数学家普莱菲尔(J. Playfair,1748—1819)等人曾把第(5)公设改写成:

过已知直线外一点能且仅能作一条直线与已知直线平行。

但这种表述方式并没有解除关于第(5)公设的问题,它并不比欧几里得的原始表述好多少。于是人们开始探求第(5)公设的证明。参加过这种尝试的人物有:古希腊天文学家托勒玫(Ptolemy,公元150年),中世纪阿拉伯数学家奥玛·海雅姆和纳西尔丁,意大利数学家萨凯里(G. Saccheri),德国数学家克吕格尔(G. S. Klügel)

和瑞士数学家兰伯特(Lambert Johann Heinrich,1728—1777)。

1823年,罗巴切夫斯基写道:“这个公设的严格证明,直到现在还没有找到;任何已经给出的证明都只能说是说明,就其完备的数学证明来说是不值得爱惜的!”

19世纪中期,达朗贝尔把第(5)公设的证明问题称为“几何的家丑”。

2 反欧几何

在冲击欧几里得第(5)公设的众多数学家当中,值得注意的是萨凯里、克吕格尔和兰伯特的工作。

萨凯里在证明第(5)公设时,遇到一连串奇妙的事,例如三角形内角和小于两直角,过直线外一点可以有无数条直线不与该直线相交等,萨凯里是用反证法来证第(5)公设的。1763年,克吕格尔在博士论文中指出,萨凯里的工作并未导出矛盾,也就是说,假设第(5)公设不成立,并无矛盾。兰伯特则明确地认识到,一组假设如果不引出矛盾,可以提供一种新几何。这3位几乎要迈进非欧几里得几何的门槛,但是囿于2000多年欧几里得几何传统思想的禁锢,他们都浅尝辄止了。1733年,萨凯里写了一本书,名曰《欧几里得无懈可击》而收兵。兰伯特的研究型著作《平行线理论》生前并未发表,他不想对两千年被科学界誉为圣经的《几何原本》说三道四。当时,谁若是对欧几里得几何持相反的观点,他就会被视为狂人。

数学史上另有3位了不起的人物,他们是匈牙利的波尔约、德国的高斯和俄国的罗巴切夫斯基,他们是非欧几何的创始人。从1813年起,高斯创立否定第(5)公设的一种新几何,称之为“反欧几里得几何”,欧氏几何开始出现脱胎换骨的改造。“非欧几何”这一学科的名字源于高斯。但高斯明哲保身,害怕世俗的非议,他在给贝塞尔的信中说他如果发表自己关于非欧几何的成果会“引起波哀提亚人的叫嚣”(波哀提亚人是古希腊一个以粗野愚昧著称的

部落人群)。波尔约(Bolyai John,1802—1860)是匈牙利数学家,其父 F. 波尔约是数学教授,高斯的同学和密友,小波尔约决心创立一种否定第(5)公设的新几何。老波尔约以自己在这方面的失败劝阻小波尔约,小波尔约不顾其父的警告不懈努力,终于在 1823 年得出非欧几何的基本原理,他把这一成果附在其父的一部数学著作之后以附录的形式出版,共 26 页,给出了一个非欧几里得的完整而无矛盾的新几何体系。1832 年,老波尔约把儿子的这篇名为《绝对空间的科学》附录送高斯,请高斯对其子的论文进行评价,高斯回信说:"称赞他就等于称赞我自己,整篇文章的内容,您的公子所采用的思路和所获得的结果,与我 30 年至 35 年前的思考不谋而合。"小波尔约对高斯这番显然是不妥当的表态十分恼火,误认为高斯想剽窃自己的成果。1860 年,小波尔约含恨谢世。1894 年,匈牙利数学会在小波尔约的墓前竖立了他的巨型石像,以示敬仰。1960 年,世界和平理事会举行了波尔约逝世一百周年的纪念仪式,并设立波尔约数学奖,他的《绝对空间的科学》已被公认为世界第一流的科学经典。

正如老波尔约劝儿子时所说:"因为那似乎是对的,很多事物仿佛都有那么一个时期,届时它们就在很多地方同时被人们发现了,正如春天紫罗兰处处开放一样。"让儿子不要怀疑别人剽窃了他的成果,其实,除了高斯与波尔约之外,还有一个更为强坚和成就卓著的非欧几何的创造者和捍卫者,他就是俄国的罗巴切夫斯基教授。

罗巴切夫斯基(N. I. Lobatchevsky,1793—1856)在 1826 年 2 月 23 日喀山大学数学物理系的学术会议上宣读了他的论文《几何原理的概述和平行线定理的严格证明》,向享誉两千年之久的几何学经典发起挑战,他说:"直到今天,几何学中的平行线理论是不完全的,从欧几里得时代以来,两千年徒劳无益的努力,使我怀疑在概念(指第(5)公设)本身之中,并未包含那样的真实情况!"1826 年 2 月 23 日被公认为非欧几何诞生之日,罗巴切夫斯基被誉为"几何学上的哥白尼"。希尔伯特说:"19 世纪最有启发性、最重要的数

学成就是非欧几何的发现。"

罗巴切夫斯基生于俄国诺夫哥罗德一个贫苦的小职员家庭,7岁丧父,罗氏自幼敏而好学,15岁以优异的成绩考入喀山大学数学物理系,4年后获硕士学位,留校讲授纯数学,24岁聘为正教授.1820年—1825年,任该系系主任,1827年—1848年任喀山大学校长。罗巴切夫斯基青年时代也曾试证第(5)公设,但很快就意识到证明第(5)公设是徒劳的。他发现把第(5)公设换成"过已知直线外一点不止有一条直线与已知直线平行",重建的一种几何也是无矛盾的,他把这种几何称为"虚几何学"。关于这种几何学,他于1829年在《喀山学报》上发表了论文《论几何基础》。1835年又在此杂志上发表论文《具有平行的完全理论的几何新基础》。1837年,他用法文发表论文《虚几何学》。1840年,用德文写成专著《平行理论的几何研究》,此书是影响最大的非欧几何的专著。

罗巴切夫斯基的虚几何学与高斯和波尔约的同类成果大同小异。

罗巴切夫斯基的新几何一问世,果然遭到了"波哀提亚人"的嘲笑甚至人身攻击,不少权威人物称罗巴切夫斯基的学说是"荒唐透顶的伪科学",有人写匿名信说罗是"疯子",有人用漫画进行讽刺挖苦,德国大诗人哥德在名著《浮士德》中写下了这样的歪诗:

有几何兮,
名曰"非欧",
自己嘲笑,
莫名其妙!

面对狂风暴雨般的攻击,罗巴切夫斯基表现出了伽里略式的"追求科学需要的特殊勇敢",寸步也不退让。1893年,喀山市竖立了罗巴切夫斯基的纪念像,1909年,非欧几何在爱因斯坦的广义相对论中成为最有力的数学工具之一。

非欧几何的诞生,是数学史上重大改革的典范。罗巴切夫斯基和波尔约的工作发表了30多年,未被重视,说明数学家们一般不情愿接受激进的思想。非欧几何的发展、完善和应用的历史证

明高斯、波尔约和罗巴切夫斯基绝不是出于钻牛角尖的怪癖和为了满足理智上的好奇心而玩弄平行公理游戏，而是科学地、严密地建立起一种新的数学分支，尽管此前人们认为罗巴切夫斯基们的几何是荒谬的。

下面我们展示一些罗巴切夫斯基非欧几何的原始创新。

罗巴切夫斯基命题 A 在直线三角形中，三个内角的和不超过 π。

事实上，如果$\triangle ABC$ 的内角和为 $\pi+\alpha$，$\alpha>0$，设最短边为 BC，D 是 BC 中点，连接且延长 AD 至 E，使 $AD=DE$，连接 E 与 C，见图 8.2。$\triangle ADB\cong\triangle CDE$，$\angle ABD=\angle DCE$，$\angle BAD=\angle DEC$，由此得$\triangle ACE$ 中，三内角之和也是 $\pi+\alpha$。

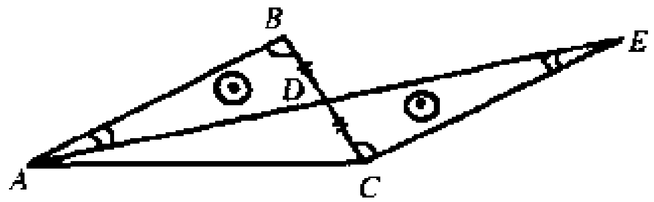


图 8.2

$\triangle ABC$ 中$\angle BAC$ 最小，又

$$\angle BAC=\angle EAC+\angle AEC$$

$\angle EAC$ 与$\angle AEC$ 中有一个不大于$\angle BAC$ 之半，且两者都比$\triangle ABC$ 中最小角还小，如此继续下去，我们可以作出这样的三角形，三个角之和为 $\pi+\alpha$，且有两个角都比$\frac{\alpha}{2}$还小，又第三个角不大于 π，这三个角加起来不是 $\pi+\alpha$，矛盾，所以 $\alpha>0$ 不成立，$\alpha\leqslant 0$，即三角形内角和有两种可能：

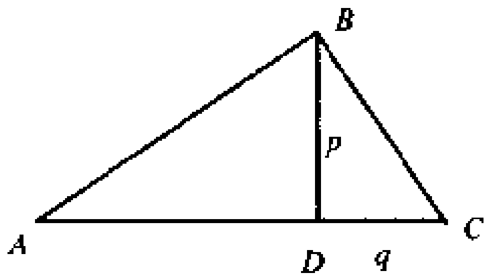
(1) 三角形内角和是 π($\alpha=0$ 时)。

(2) 三角形内角和小于 π($\alpha<0$ 时)。

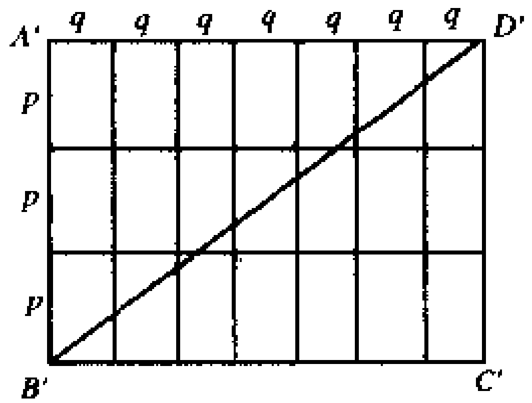
在以上的论证中，没有动用欧几里得第(5)公设。

罗巴切夫斯基命题 B 如果存在一个直线三角形其内角和是 π，则一切直线三角形的内角和皆为 π。

事实上，假设在△ ABC 中，三内角之和为 π，△ ABC 中至少有两个角（不妨设$\angle A$ 与$\angle C$）是锐角，不然与罗巴切夫斯基命题 A 相违；从第三个角$\angle B$ 的顶点向对边作垂线，于是△ ABC 被划分成两个直角三角形△ ABD 与△ BDC，这两个三角形每个的内角和也是 π，因为一个的内角和小于 π，则另一个的内角和就要大于 π，这是不可能的。于是得到一个两直角边分别为 p 与 q 的直角三角形，见图 8.3(a)，这个直角三角形内角和为 π，用两个全等的这种三角形，可以构成一个对边相等，每个角皆 π 的四边形，用这种四边形可以铺成边长分别为 $A'B' = np$，$A'D' = mq$ 的对边相等且每角皆$\frac{\pi}{2}$的大四边形，见图 8.3(b)，其中 m，n 是正整数。对角线 BD 把它划分成两个全等的直角三角形△ $A'B'D'$ 与△ $B'C'D'$，这两个三角形（由命题 A）内角和皆 π。



(a)



(b)

图 8.3

下面证明，在△ ABC 内角和为 π 的条件下，一切直角三角形内角和为 π。设△ PQR 是任意的直角三角形，则可以把 RP 与 RQ 延长到 P_1 与 Q_1，且使得△ P_1Q_1R 是一个内角和为 π 的直角三角形（即 $RP_1 = mp$，$RQ_1 = nq$）见图 8.4。连接 P_1Q，由命题 A，若△ P_1RQ 的内角和不是 π，则

$$\angle 4 + \angle 5 < \frac{\pi}{2}$$

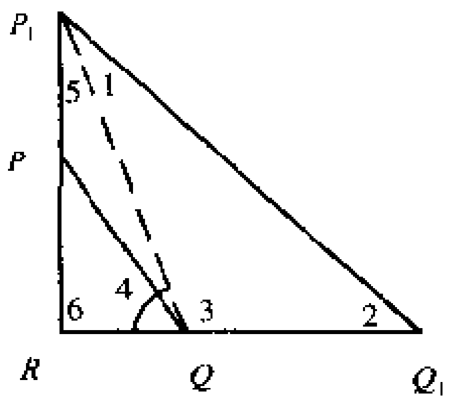


图 8.4

而

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3+(\angle 4+\angle 5)=\frac{\pi}{2}+\pi$$

于是$\angle 1+\angle 2+\angle 3>\pi$,与$\triangle P_1QQ_1$内角和不大于 π(命题 A)矛盾,故$\triangle P_1RQ$的内角和是 π,同理$\triangle PQR$的内角和是 π。

对于任意三角形,可以从最大内角向对边引垂线,把它划分成两个直角三角形,于是可知任意三角形的内角和为 π。

以上论证未用到欧几里得第(5)公设。

从命题 A 与命题 B 可知,对于所有的直线三角形,只有两种可能,或者每个三角形的内角和皆 π,或者每个三角形的内角和皆小于 π。

罗巴切夫斯基命题 C 如果一切直线三角形内角和相等,则这个和就是 π。

事实上,这时,设三角形内角和皆为 x,在$\triangle ABC$的边AC上任取一点 D,连接 BD,见图 8.5,则

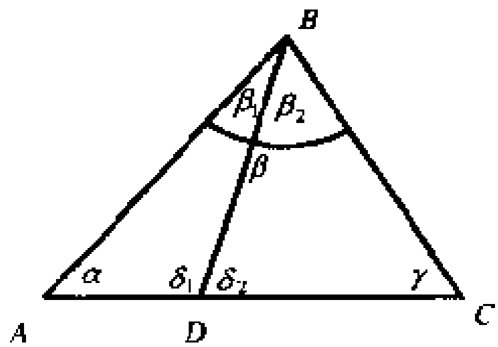


图 8.5

$$x=\alpha+\beta+\gamma, x=\alpha+\beta_1+\delta_1, x=\gamma+\beta_2+\delta_2$$

$\beta_1+\beta_2=\beta$,进而得

$$\begin{aligned}2x&=\alpha+(\beta_1+\beta_2)+\gamma+(\delta_1+\delta_2)=\\&\alpha+\beta+\gamma+\pi=\\&x+\pi\end{aligned}$$

解得 $x=\pi$。

由命题 C 得出如果所有的三角形内角和小于 π,则三角形的内角形不会是一个定值。

罗巴切夫斯基命题 D 若三角形内角和小于 π,当且仅当过直线 a 外一点 A 可以引出不止一条直线不与 a 相交。

事实上,欧几里得已证明,若过 A 点仅引一条直线不与 a 相交,当且仅当三角形内角和是 π。

至此造成如下局面:

(1) 过 A 点仅能引一条直线与 a 平行,等价于三角形内角和皆 π,这便是欧几里得几何的第(5)公设。

(2) 过 A 点可以引不止一条直线不与 a 相交,等价于一切三角形之内角和皆小于 π。

罗巴切夫斯夫以(2)替代(1)之后得到了一种无矛盾的新几何,称为罗巴切夫斯基几何,它是非欧几何的一种。

在罗巴切夫斯基几何中,有众多与我们中学时代熟知的几何定理相违背的新定理,兹举例若干如下。

(1) 在平面上对于同一条直线,其垂线与倾斜线并不永远相交。

因为如果垂线与倾斜线相交,则第(5)公设成立。

(2) 相似而不全等的三角形是不存在的。

因为若存在两个相似而不全等的三角形,则第(5)公设成立;罗巴切夫斯基把三对对应角分别相等的两个三角形称为两三角形合同。

(3) 有不能画外接圆的三角形存在。

因为每个三角形皆存在外接圆,则第(5)公设成立。

(4) 平面上在一已知直线的同侧且与此直线距离相等的点的轨迹是一条曲线，此曲线上任何三点不在同一直线上。

因为如果此轨迹上任三点在同一直线上，则第(5)公设成立。

(5) 圆内接正六边形的边大于圆的半径。

事实上，如图 8.6，由于△ OAB 的内角和小于 π，故$\angle AOB = \frac{\pi}{3}$是它的最大内角，由大角对大边，可知 $AB > OA$。

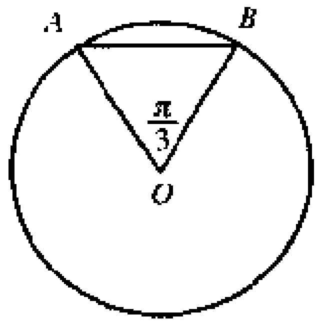


图 8.6

(6) 过锐角的一边有垂线不与另一边相交。

(7) 从直线 a 外一点 A 可以作无穷条直线与 a 不相交。

罗巴切夫斯基几何的出现，对公理方法的发展起到了决定性的影响。1899 年，希尔伯特的名著《几何基础》出版，书中给出了 5 组共 21 条公理，是现代公理化方法的榜样，希尔伯特是现代公理化方法的奠基人。这种方法始于欧几里得，被罗巴切夫斯基等人发展，而集大成于希尔伯特。希尔伯特提出了组建公理的三原则：

(1) 相容性，即公理系统要无矛盾。

(2) 独立性，即任一条公理不能被其余公理逻辑地推导出来。

(3) 完备性，即系统中的一切定理皆可由该系统的公理推出。

第一组：结合公理

(1) 对于任意两点 A，B，存在过 A，B 两点的直线。

(2) 对于任意不同的两点，至多存在一条过 A，B 两点的直线。

(3) 每条直线上至少有两个点；至少存在三个点，不在同一直线上。

(4) 对于任意不在一条直线上的三个点 A,B,C,存在过 A,B,C 每个点的平面。对于任意平面总是存在着属于它的一个点。

(5) 对于任意不在一条直线上的三个点 A,B,C,至多存在一个平面过这三个点。

(6) 如果直线 a 上的两个点 A 与 B 在平面 α 上,则直线 a 上的每个点皆在平面 α 上。

(7) 如果两个平面 α,β 有公共点 A,则它们至少还有一个公共点。

(8) 至少存在四个点,不在一个平面上。

第二组:顺序公理

(1) 如果点 B 在点 A 与点 C 之间,那么 A,B,C 是一条直线上不同的点,并且 B 也在 C 与 A 之间。

(2) 对于任意两点 A 与 C,在直线 AC 上至少存在着一个点 B,使 C 在 A 与 B 之间。

(3) 直线上任意三个点中,至多有一点在其它两点之间。

(4) (帕波斯公设)设 A,B,C 是不在一直线上的三点,a 是平面 ABC 上一直线,它不通过 A,B,C 中任何一个点,若这时直线 a 通过线段 AB 的一个点,那么它必须或者通过线段 AC 的一个点或者通过线段 BC 的一个点。

第三组:合同公理

(1) 如果 A,B 是直线 a 上两点,且 A' 是同一条或另一条直线 a' 上的点,则在 a' 上 A' 点的一侧可以找出点 B',使得 AB 合同于 $A'B'$,即 AB 等于 $A'B'$,记成 $AB\equiv A'B'$。

(2) 如果线段 $A'B'$ 与 $A''B''$ 都合同于线段 AB,则 $A'B'$ 合同于 $A''B''$。

(3) AB 与 BC 是直线 a 上两个线段,设有公共内点,$A'B'$ 与 $B'C'$ 是同一条或另一条直线 a' 上两个线段,也没有公共内点,若 $AB\equiv A'B'$,$BC\equiv B'C'$,则 $AC\equiv A'C'$。

(4) 在平面 α 上给定角 $\angle(h,k)$(h 与 k 是从同一点 O 出发的两射线),在平面 α' 上给定直线 a',而且在平面 α' 上给了关于直线

a'的确定的一侧；h'是直线a'上从O'出发的射线，在这种情形下，平面α'上存在一条面且仅有一条射线k'，它有下述性质：$\angle(h,k)$合同于，换言之，等于$\angle(h',k')$，且这时$\angle(h',k')$内部的点皆在平面α'上关于直线a'的给定的一侧，记这时两角的合同关系为

$$\angle(h,k)\equiv\angle(h',k')$$

每个角都与自己合同，即$\angle(h,k)\equiv\angle(h,k)$。

(5) 若对于$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$，有合同关系

$$AB\equiv A'B',AC\equiv A'C',\angle BAC\equiv\angle B'A'C'$$

则$\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$。

第四组：平行公理

(1) 欧几里得公理：设a是任一条直线，A是它外边的点，这时，在直线a与点A确定的平面上，过点A而不与直线a相交的直线至多有1条。

(2) 罗巴切夫斯基公理：设a是任一条直线，A是它外边一点，这时在直线a与点A确定的平面上，过点A而不与直线a相交的直线至少存在两条。

第五组：连续公理

(1) 阿基米德度量公理：设AB与CD是两个任意线段，那么在直线AB上存在着有限个点$A_1,A_2,\cdots,A_n$，这些线段$AA_1,A_1A_2,A_2A_3,\cdots,A_{n-1}A_n$都合同于线段$CD$，且$B$点在$A$与$A_n$之间。

(2) 康托尔公理：若在直线a上给出闭线段的无穷序列

$$A_1B_1,A_2B_2,\cdots,A_nB_n,\cdots$$

其中每一条在后的线段$A_{n+1}B_{n+1}$都属于前一线段A_nB_n，且不存在这样的线段，它属于已给序列的所有线段，那么存在一个而且只存在一个点属于序列的所有线段。

第九章　概率与混沌

巴西境内一只蝴蝶扇动翅膀，可能引起德克萨斯州的一场龙卷风。

——E.洛伦兹

1　概率论与数理统计

1663年意大利数学怪杰卡尔丹(G. Cardano，1501—1576)写出概率论的萌芽之作《游戏机遇的学说》，讨论了两人赌博中断，如何分赌本的问题，且提出了“大数定律”等基本的概率理论之原始模型。分赌本问题不只引起曾经有20几年掷骰子赌博经验的卡尔丹的兴趣，而且16世纪意大利的数学家帕乔利(L. Pacioli，1445—1517)、塔塔利亚(N. Tartaglia，1499—1557)等人也讨论过这种问题。到17世纪，法国的著名数学家帕斯卡(B. Pascal，1623—1662)和费马(P. Fermat，1601—1665)也曾多次通信讨论这一概率论的始祖问题。

1654年7月29日，帕斯卡给费马的信中写道：“下面给出两个赌徒分配赌金的方法，例如每人投放32枚金币作为赌金，并以先得3分为赢。

假设第一人已得2分，另一人只有1分，他们掷下次时，若第一人赢了，他将得到全部64枚金币；若另一人赢了，他们的比分是2比2。如果在这种情况下分赌金的话，每人将拿回自己所下的赌金，即32枚金币。

综上所述，第一个人如果赢了，64枚金币将属于他；如果他输了，32个金币将属于他。假如他们不愿继续玩下去而要分赌金的

话,第一个人应该说:"我一定能得32枚金币,即使我下一轮输了,也应该把它们给我。至于另外的32枚金币,也许我得到它们,也许你得到它们,机会是均等的。所以在给我32枚金币之后,让我们均分另外的32枚吧。"这样,他将得到48枚金币,而另一个人只能得到16枚金币。

现在假定第一个人得2分而另一个人得零分,他们正在争夺下一分,如果第一个人赢了,他将得到全部64枚金币;如果另一人赢了,注意他们将回到前面的情况,即第一人得2分,而另一个人得1分。

但我们已经说明了在这种情况下已有2分的人将得到48枚金币。所以如果他们不希望继续赌下去的话,这人应该说:"如果我赢了,我将得到全部64枚金币;如果我输了,48枚金币将属于我,所以请把48枚金币给我,然后再均分这剩下的16枚金币,因为你我赢得它的机会是均等的。"于是,他获得金币的数目为

$$48\text{枚} + 8\text{枚} = 56\text{枚}$$

现在假定第一个人有1分而另一个人为0分。请看,如果他们再掷一次而第一个人赢了,他与对手的比分将是2比0。根据前述理由,56枚金币将属于他。如果他输了,他们的比分就成为1比1,32枚金币将属于他,所以他应该说:"如果你不打算赌下去,就请把我原来的32枚金币给我,再让我们把56枚金币的剩余部分均分。56减去32为24,让我们来平分这24枚金币吧,你拿12枚,我拿12枚,再加上我原来的32枚,我一共应得44枚金币。"

请看,在这种情况下,通过简单的减法,就可以知道如果他赢了第一轮,他将从对方得到12枚金币;如果他继续赢得第二轮,将再从对方得到12枚金币;赢得第三轮,则再得到8枚金币。"

费马1654年给帕斯卡的信中说:

"帕斯卡先生:

如果两人赌博时以掷8次骰子为一局,而在下赌注之后我与对方商定,我放弃掷第一次的机会,那么根据我的理论应该得到全

部赌金的$\frac{1}{6}$作为补偿。

如果我继续放弃掷第二次的机会,就应得到所剩赌金的$\frac{1}{6}$,即全部赌金的$\frac{5}{36}$作为补偿。

如果第三次轮到我的时候,我仍然弃权,应该得到上次所剩赌金的$\frac{1}{6}$,即全部赌金的$\frac{25}{216}$作为补偿。

如果我第四次弃权,就应得到第三次所剩赌金的$\frac{1}{6}$,即全部赌金的$\frac{125}{1296}$;您说这就是假定掷了前3次之后第四次掷的价值,我完全同意。

但您在来信的最后一个例子中说,如果我在赌博时(以掷8次为一局)要的是6点,而连掷3次都没有得到这个点数。对手建议我不掷第四次,那我就该得到全部赌金的$\frac{125}{1296}$作为补偿。按照我的理论,并非如此。因为在这种情况下,先前掷的3次什么也没得到,赌金总数未变,持有骰子而放弃第四次的人应得全部赌金的$\frac{1}{6}$作为补偿。

如果他已掷4次而没有发现期望的点数,双方商定他不再掷第五次,他依然应得全部赌金的$\frac{1}{6}$,因为赌金总数依然如故。不管是从理论上还是从常识上来说,掷每一次的价值应该是相等的。

我急于知道,您是否同意我的理论,请来信赐教。我相信我们会取得一致的意见,或者仅仅在它的应用方面有些异议。

顺致衷心祝福。

费马 1654"

帕斯卡回信中称费马的方法是正确的,而且是这类问题研究中首次得出的正确答案。

费马与帕斯卡的通信讨论的问题被有关数学家惠更斯(C. Huygens, 1629—1695)发现后,对这种问题进行了深入研究,1657

年，惠更斯的名著《论赌博中的计算》一书出版，此书是概率论的第一部成型的著作，提出数学期望、概率的加法定理与概率的乘法定理等基本概念。

使概率论成为一个独立的数学分支者是瑞士数学家雅各布·伯努利(Jakob Bernoulli，1655—1705)，他证明了掷 n 颗骰子所得总点数为 m 这样场合的数趴为

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^n$$

展开式中 x^m 这一项的系数，这不仅是概率论的一个妙解，而且开了母函数的先河。

1713 年出版了雅各布·伯努利的遗作《猜度术》，建立了概率论中的第一个极限定律，即现称之为伯努利大数定律的那个定理：

在独立试验中，事件 A 出现的概率是 p，则对任取的 $\epsilon > 0$，

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\left|\left(\frac{m}{n} - p\right)\right| < \epsilon\right\} = 1$$

其中 m 为 n 次试验事件 A 出现的次数。

这一大数定律指出，概率是相对频率的数学抽象，伯努利的这一理论在概率的发展史上起到了理论奠基的作用。伯努利在《猜度术》中有一段话说得又直白又深刻，深入浅出地解释了大数定律的含义："每个人都清楚，利用任何单个观测作为基础来预言一些未来事件是不充分的，而应要求有大量的观测，一个没有受过教育，以前也没有受过训练的人，凭天生的直觉，也会清楚地知道，可利用的有关观测的数目越多，发生错误的风险就越小。尽管我们都以非常自然的方式认识到这一点，但是，这个原理的科学证明却一点也不简单。有些问题更需要考虑，而对一般人来说，这些问题也许还没有想到。所要探讨的是，是否随着观测次数的增加，记录下来的赞成与不赞成的比值接近真实比值的概率也随之不断增加，使得这一概率终将超过任意确信度。以下的解释使我所说的含义更清楚：我们有一个罐子，里面装了 3000 个小白卵石和 2000 个小黑卵石，这些数目我们事先不知，希望从经验上确定罐中白黑卵石的比例。方法是从罐中将卵石一个接一个地取出、记录下取

出了多少白卵石和多少黑卵石,每取出一个卵石,记下它的颜色,立刻把它放回罐中。现在我们问,是否可以通过无限扩大试验,比如做 10 次,100 次,1000 次等,取出的白卵石数目与黑卵石数目之比(最终是"必然")和罐中白卵石与黑卵石数目的真实比例取相同的值(3:2),还是取出的白卵石与黑卵石数目之比将取不同的值?如果回答是"不",则我承认,试图通过观测来确定每个结果的例证数目(即白卵石与黑卵石的数目)可能要失败。通过这种方法,我们最终能够达到内心确信的必然性。我们几乎能够精确地事后确定例证的数目,好像我们事先知道这些数目一样。这种考虑能使我们对带有偶然性的事件做出预测。如果我们用大气层或人体来替代上面所说的罐子,在其内部隐藏着大量的各种各样的变化过程或疾病,就如同罐子里隐藏着的卵石一样,这时,我们仍能通过观测来确定其中某事件将比另一事件更频繁发生的可能性有多大。

应当指出,反映不同结果数目之间的实际比例决不可能绝对精确地获得,这一点恐怕不完全能被理解。因为如果精确获得是可能的话,那将与我们断言的相对立,我们获得的比例仅是近似的"。

1812 年,拉普拉斯的名著《概率的分析理论》出版,书中系统地总结了前人关于概率的研究成果,明确了概率的古典定义,在概率论中引人分析方法,把概率论提高到一个新的阶段,把此前各数学家关于概率的零星结果系统化。1814 年第二版的书名换成《概率的哲学导论》。

在《概率的哲学导论》中,关于概率的含义,拉普拉斯做了如下的精辟阐述:

生活中发生的一切事件,甚至那些因无足轻重而被认为不遵守神圣的自然法则的事件,都如同地球的公转一样是自然法则的必然产物,因为没有明白宇宙这个庞大体系中连接这些事件的每个环节,它们的出现只好被视为有"终极原因"的。主观臆断的所谓"终极原因"这种哲学本身只是表明对真理的无知。其实,单个空气或水蒸气分子的运动轨迹和行星的轨道一样是有规可循的,

只不过是人类缺乏对前者的足够认识。

在概率中,倘若知道三件或更多的事件中总有一件会发生,然而尚无任何理由认为其中一件比其他事件更可能发生,那么,在这种不确定的情况下,要说哪一事件一定会发生是不可能的。但是,如果许多等可能情况都排除某事件发生,只有一种情况有利于它发生,那么,在这些事件中随意地选取一件,则该事件不大可能出现。

机会的理论是把同类的所有事件化归为一定数量的等可能情况,这里所说的等可能情况,就是对于属于同一类的事件,人们以同等程度不能判定哪种事件会发生,并且确定在哪些情况下被考虑的事件可能发生。

可能发生的次数与总次数之比,就是对该事件出现的概率的一个描述。上面关于概率概念是假设了概率是恒定的,即当总的试验次数增加时,该事件发生的次数也增加,并且比值不变。假设有两个罐子 A 与 B、A 中 4 个白球 2 个黑球,B 中 2 个白球 1 个黑球;假想 A 中的 2 个黑球用绳子连在一起,而当其中任何一个黑球被取到时,绳子就会自动断开,另外的 4 个白球照此用绳子连成两组,由于取到 A 中连在一起的 2 个黑球将意味着取了 1 个黑球,因此,若假想连接的绳子不会断开,显然,这对取黑球的可能不产生任何影响,只不过每回取到的是 2 个球,因此,在两种情况下,从 A 中取 1 个黑球的可能性是一样的。A 中两个连在一起的 3 对球与 B 中的 3 个球并没有本质上的不同。

当某一事件在所有的试验中都发生时,可能性事件就成了必然事件,它的概率等于 1。在这种情况下,可能性与确定性变得可比了,但它们之间有着本质的不同,当人们说某件事是事实时,它被认为是实实在在的,而当人们说某件事发生的概率为 1 时,意味着它发生的断言还有修正的可能。

掌握信息材料的多少,是对同一事件可能性看法不同的主要原因。例如,有 A,B,C 3 个罐子,其中一个里面全是黑球,另两个里面全是白球,求从罐 C 中抽得一只黑球的概率。如果不知道哪

个罐里是黑球，要求的概率为$\frac{1}{3}$，如果我们已知 A 中是白球，要求的概率为$\frac{1}{2}$，如果已知 A 与 B 中都是白球，则要求的概率为 1。

拉普拉斯在《概率的哲学导论》中给概率下的定义是："有利情况的个数与所有可能情况个数之比。"他还得出了概率的加法与乘法等运算定律。

1777 年，法国数学家蒲丰(Buffon Georges Louis Leclerc，1707—1788)提出几何概率的概念，其典型模型是：

长 l 的同质均匀针随机地投向画有最近两平行线相距为$a > l$ 的许多平行线的平面，求针与直线相交的概率。

这里"随机"是指针的中心的落点与针的方向都是等概率的，而且中心落点与针的方向无关。

令 x 表示针的中心与平行线的最近距离，φ 表示针与平行线的夹角，于是(由图 9.1)：

$$X < \frac{l}{2}\sin\varphi, \qquad 0 < \varphi < \pi$$

$$x \in [0, \frac{a}{2}]$$

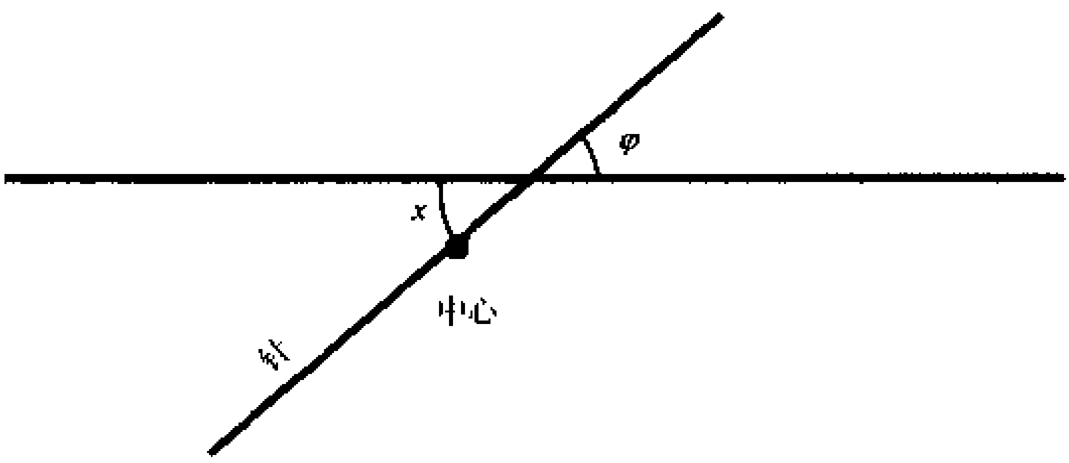


图 9.1

在直角坐标系 $Ox\varphi$ 中，考虑矩形 $ABOC$(见图 9.2)，此矩形内每一点(x, φ)与针落在平面上的方位一一对应。阴影区内的点对应针与平行线相交，于是所求概率为

$$p = \frac{\text{阴影区面积}}{\text{矩形面积}} = \frac{\frac{l}{2}\int_0^{\pi}\sin\varphi \mathrm{d}\varphi}{\frac{a}{2}\pi} = \frac{2l}{\pi a}$$

这是数学史上古典概率中几何概率的一个精彩实例，由于

$$\pi = \frac{2l}{pa}$$

只要求得 p，则可以求出 π。1901 年意大利的拉泽里尼(Lazzerrini)投针 3408 次，他统计出与平行线相交的次数 m，$p \approx \frac{m}{3408}$，于是求得 π 的近似值，他求出的 π 准确到 6 位小数。

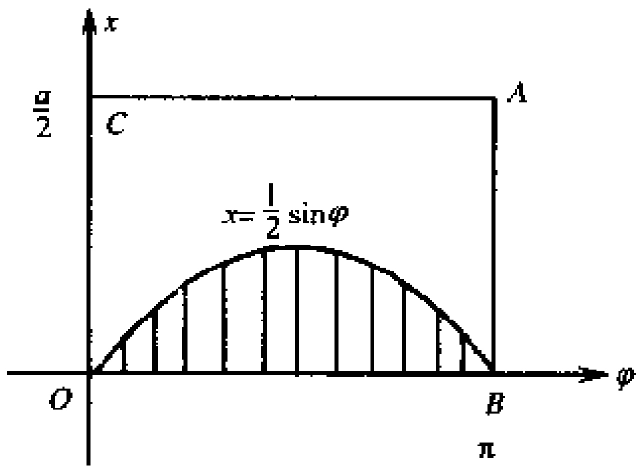


图 9.2

1812 年，在《概率的分析理论》中拉普拉斯推广了蒲丰的模型：两组正交等距平行线，一组距离为 a，另一组距离为 b，针长 $l < \min\{a, b\}$，则针与任一直线相交的概率为

$$p = \frac{2l(a + b)}{\pi ab}$$

当 $b \to +\infty$ 时(或 $a \to +\infty$ 时)，即为蒲丰的结果。

1733 年棣莫弗，1809 年高斯分别独立地引入正态分布。1837 年，法国数学家泊松给出泊松大数定律，泊松(Poisson Simeon-Denis，1781—1840)是巴黎综合工程学校教授，1837 年发表的著名论文《关于判断的概率之研究》中，还提出泊松分布，他的主要工作是数学物理，例如他在 1835 年的专著《热学的数学理论》是 19 世纪

热学研究集大成之作。

19 世纪后期，概率论的主要成就是中心极限定理，主要人物是俄国的切比雪夫，他于 1866 年建立的独立随机变量的大数定律，使伯努利和泊松的大数定律成为其特例，他还把棣莫弗与拉普拉斯的极限定理推广成一般的中心极限定理。

1899 年，法国科学家贝特朗(J. Bertrand)提出了针对古典概率中的含糊与矛盾的所谓"贝特朗悖论"：在半径为 r 的圆 O 内随机地选择弦，求弦长超过圆内接正三角形的边长之概率。

(1)画圆的切线及过切点 A 的等边内接三角形，如图 9.3(a)所示，在$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$ 中夹的弦各占以 A 为端点的全体弦的$\frac{1}{3}$，而$\angle 2$ 中含的弦为所求，故所求概率为$\frac{1}{3}$。

(2)在$\odot O$ 中画一个以$\frac{r}{2}$为半径的同心圆(见图 9.3(b))，弦的中心落在小圆内时，其弦长超过$\odot O$ 内接正三角形之边长，而小圆面积是$\odot O$ 面积的$\frac{1}{4}$，故所求概率为$\frac{1}{4}$。

(3)作$\odot O$ 直径 AB，A，C，E，B，F，D 为$\odot O$ 的六等分点(见图 9.3(c))，与 AB 正交的全体弦的一半落在平行线 CD 与 EF 之间，所以所求概率为$\frac{1}{2}$。

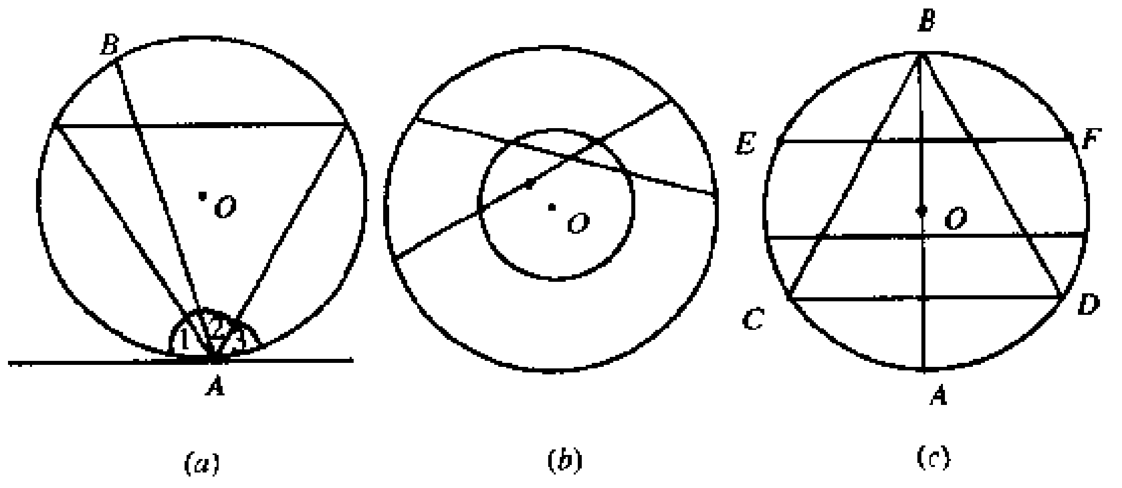


图 9.3

由于“任意随择”的不同理解，造成“一题多解”，出现了不唯一的答数！拉普拉斯在《概率的分析理论》与《概率的哲学导论》中关于古典概率的含糊概念陷入严重危机之中。

为了克服古典概率的缺点，人们开始从创建概率的公理系统入手来改造古典概率，例如俄国数学家伯恩斯坦（C. H. Бернштейн，1880—1968），奥地利数学家冯·米西斯（R. Von Mises，1883—1953）等，提出了一些公理作为概率论的源头命题，但都不够完善。1905年法国数学家波莱尔（Borel Emile，1871—1956）用他创立的测度论语言来表述概率论，为克服古典概率的弱点打开了大门。波莱尔是法国数学家班勒卫的学生，1920年曾随班勒卫来中国讲学，他把康托尔的集合论与古典分析相结合，对实变函数论有重要贡献，例如建立了有限覆盖定理和测度理论等。1921年之后，他投身政界，官至市长、议员和法国海军部长等。

从20世纪20年代起，苏联的大数学家柯尔莫哥洛夫开始从测度论的途径来改造概率论。1933年他以德文出版了经典名著《概率论基础》，他作为莫斯科函数论学派领袖鲁金（1883—1950）的学生，有雄厚的数学实力运用测度来搞概率，他的这本名著中建立了柯尔莫哥洛夫公理化概率论。

1934年，柯尔莫哥洛夫的学生辛钦（A. R. Хинчин，1894—1959）提出所谓“平稳过程”理论，所谓平稳过程是指随机现象中其统计性质不随时间变化的随机过程。

1942年，日本数学家伊藤清引进了随机积分与随机微分方程，为随机分析的建立奠定了基础。

柯尔莫哥洛夫（A. H. Колмогоров，1903—1987），是20世纪最伟大的数学家之一，他的母亲柯尔莫哥洛娃出身贵族，柯尔莫哥洛夫出生10天其母即去世，他由姨母抚养。1963年柯尔莫哥洛夫在他的文章《我是如何成为数学家的》中说：“五、六岁时，我就领受数学发现之乐趣，我观察到

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 2^2$$

$$1+3+5=2^3$$
$$1+3+5+7=2^4$$

等,我发明了一个算术问题:"要固定一个有四孔的扣子要用线缝合两个孔,问有多少种不同的固定方法?"1920年,考入莫斯科大学物理数学系,1922年,他只是一个大三的学生,构造了一个几乎处处发散的傅里叶级数而扬名世界,1926年,他又发现了一个处处发散的傅里叶级数。1925年成为鲁金的研究生,与鲁金的另一学生辛钦一起从事概率论研究。1934年获苏联首批博士学位。1931年任莫斯科大学教授,1933年任莫斯科大学数学力学研究所所长。1939年任苏联科学院院士。1980年获沃尔夫(Wolf)奖。他在国内得的大奖有十几项,是美、英、法、德等十几个国家科学院院士。鲁金学派培养了举世闻名的一大批数学大师,柯尔莫哥洛夫是其中最杰出的代表。他写了488篇论文,几乎遍及一切数学领域,是20世纪最有影响的少数几个数学家之一。

1929年,柯尔莫哥洛夫的论文《概率论与测度论的一般理论》,首次给出了测度论为基础的概率论公理结构。1930年他的作品《概率论中的解析方法》开创了无后效随机过程一般理论(即马尔科夫过程)。

1939年柯尔莫哥洛夫还把概率统计应用于生物学,用统计学的理论验证了基因遗传的孟德尔定律。值得佩服的是他的这种成果是在当时苏共已经宣布"基因"与孟德尔(Mendle)律是"唯心主义"的"反科学"的学说的社会背景之下提出的。

1949年,柯尔莫哥洛夫与格涅坚科合作写出《独立随机变量和极限分布》一书,成为弱极限理论的经典著作。

20世纪50年代中期,柯尔莫哥洛夫与他的学生阿诺尔德以及美国数学家莫泽(J. Moser)合作,研究微扰之下的Hamilton系统的动力学基本问题,建立了著名的KAM定理。

1956年,柯尔莫哥洛夫证明:任何一个4个变量的连续函数皆可表成3个变量的连续函数的叠合;阿诺尔德也参加了这项工作。他们否定了希尔伯特第13问题中的猜想:$f^7+xf^3+yf^2+zf+$

$1=0$的解 $f(x,y,z)$不能借助仅含两个变元的连续函数解出。柯尔莫哥洛夫还得到如下精美的结论：

对任意整数 $n\geqslant 2$，必有$[0,1]$上连续的函数族$\{\Psi_{ij}(\cdot)\}$，使$[0,1]^n$上任一连续函数f可以表成

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{2n+1}\varphi_i(\sum_{j=1}^{n}\Psi_{ij}(x_j))$$

其中 $\varphi_i(\cdot)$是实连续函数。

这一定理已成为人工神经网络设计的理论基础。

20世纪60年代，柯尔莫哥洛夫开创了“演算信息论”和“演算概率论”两个新分支，讨论了如何判定一个二进数列是随机的。

柯尔莫哥洛夫对数学概念的发现极富敏感性，苏联著名数学家亚历山大罗夫说过，数学天才有敏捷型与迟缓型两种，柯尔莫哥洛夫属于前者，而希尔伯特属于后者。柯尔莫哥洛夫的工作特点是，关心各个领域，从中发现基本问题，首先创建若干基本原理，接着让他的学生继续研究，逐渐吸引大量人员参加，他是他的学生领导的许多学派的奠基人。

柯尔莫哥洛夫淡泊名利，从不夸耀自己的头衔和成就，更不看重金钱，他把巴尔桑奖等国际国内大奖的奖金捐给学校图书馆，而沃尔夫奖的奖金他干脆放弃。

下面简单谈一下数理统计的历史。

近代统计学的发展起源于20世纪初，是在概率论的基础上发展起来的，但统计性质的工作可以追溯到远古的“结绳记事”，和《二十四史》中大量的关于我国人口、钱粮、水文、天文、地震等资料的记录。西方则把收集和整理国情资料的活动称为统计，统计一词(Statistics)正是由国家(State)一词演化而来的。

1662年，英国统计学家J.格兰特组织调查伦敦的人口死亡率，并发表专著《从自然和政治方面观察死亡统计表》，格兰特还对保险统计、经济统计进行了数学研究，称其学问为“政治算术”。他发现人口出生率与死亡率相对稳定，提出了“大数恒静定律”，之后统计学的数学性质逐渐加重。

1763 年，英国统计学家贝叶斯(T. Bayes)发表《论机会学说问题的求解》，给出“贝叶斯定理”，从结果去对原因进行后验概率的计算，可视为最早的数学化的统计推断。

19 世纪初，高斯和勒让德建立“最小二乘法”，且用之于分析天文观测的误差，成为数理统计之中的重要方法。

19 世纪中叶，比利时统计学家 A. 凯特勒和英国生物学家 S. 高尔顿在数理统计方面的工作对现代数理统计的发展影响甚大。凯特勒把统计方法应用于天文、数学、气象、物理、生物和社会学，且强调了正态分布的用途，他曾长期进行比利时国力调查且组织国际统计工作，使数理统计方法被方方面面的科学技术领域所接受和重视。高尔顿于 1889 年出版数理统计著作《自然的遗传》，引入回归分析方法，他给出回归直线和相关系数的重要概念。在同一时期，爱尔兰经济学家 E. Y. 埃奇沃思引入方差概念。

从 19 世纪末到第二次世界大战结束，数理统计得到蓬勃发展并日臻成熟。这一时期，英国数学家 K. 皮尔逊用数理统计的方法得出生物统计学和社会统计学的基本法则，进一步发展了回归分析和相关的理论，他于 1900 年提出检验拟合程度的 χ^2 统计量和 χ^2 分布，建立了 χ^2 检验法。1908 年，英国科学家 W. S. 戈塞特导出大统计量及其精确的分布，建立了 t 检验法。戈塞特是皮尔逊的学生，所以戈塞特发表 t 分布时以“学生”为笔名，t 分布称为“学生分布”。χ^2 分布讨论的是总体概念与群体现象，t 分布则讨论小样本理论与随机现象。

作为一门独立的学科，现代数理统计的奠基人是英国数学家和生物学家费希尔(Fisher Ronald Aylmer，1890—1962)，他生于伦敦，卒于奥大利亚，毕业于剑桥大学，教过中学，长期在农业试验站搞生物实验，先后任伦敦大学和剑桥大学教授，1929 年，当选皇家学会会员。1922 年出版了他的现代统计的基础性著作《理论统计的数学基础》，对统计中的多元分析、相关系数、样本分布及其在生物遗传与优生方面的应用，进行了系统深入的阐述。他的主要贡献在估计理论、假设检验、实验设计和方差分析等方面。他领导的

伦敦大学数理统计学派在20世纪30年代到40年代，在世界数理统计界占主导地位。

1940年，瑞典数学家克拉默(H. Cramer)发表《统计学的数学方法》，运用测度论方法总结数理统计的成果，使现代数理统计趋于成熟。

第二次世界大战期间，美籍罗马尼亚数学家瓦尔德(A. Wald，1902—1950)为解决军方提出的军需验收的实际问题提出"序贯抽样"方法。1947年，他的专著《序贯分析》出版，使序贯分析成为数理统计的一个新分支，瓦尔德的思路是：先抽少量样本，根据分析结果决定是否继续抽样以及再抽取多大的样本，直至一定精度而止。

瓦尔德还用博弈的观点看待数理统计，定义统计推断的风险函数，于1950年出版他的名著《统计决策函数》一书，同年因飞机失事身亡。

与现代数理统计有密切关系的一门重要学科是"博弈论"或称"对策论"。瓦尔德用与大自然对策的观点研究数理统计，使各种统计问题统一起来，促进了数理统计的发展。

对策论是研究由一些带有竞争性质的个体构成的体系的理论，讨论在竞争中是否存在制胜的策略以及如何找到这种策略的理论。其萌芽可以追溯到中国的"田忌与齐王赛马"，现代博弈论则起源于下棋或赌博等游戏。1921年法国数学家波莱尔(Borel)提出"最小最大解"的原始理论，1928年，冯·诺依曼发表《游乐场中的博弈理论》一文，首次提出策略的概念和两人零和博弈模型。对策论的另一研究的起点是数理经济学，1944年，冯·诺依曼(Von-Neumann)和O. 莫根斯特恩(O. Morgenstern)合作出版《博弈论与经济行为》一书，把对策论成功地用于经济学研究，为博弈论奠定了基础。

第二次世界大战期间，对策论广泛用于军事问题，促进了这一学科的发展。战后，这一学科又广泛地用于经济学、心理学、政治学等领域，取得了令世人瞩目的重要成果。近年来，数理经济学中

关于竞争平衡的问题,经济增长与资本积累问题,都因采用对策论的研究方法而受益颇丰。这方面的突出人物有 John Nash,Selton,Harsanyi,James A. Mirrlees,William Vickrey。

美国数学家 John Nash 生于 1928 年,他的主要成就是给出非零和一般不合作博弈 Nash 均衡存在定理(实质上是一种不动点定理),区分不合作与合作两类博弈以及所谓"谈判问题"的研究。

20 世纪 50 年代中后期,德国人 Selton 提出子博弈的概念,精炼了 Nash 均衡与其他动态博弈。美籍匈牙利人 Harsanyi 提出 Bayes Nash 均衡理论与其他不完全信息博弈。

Nash,Selton 和 Harsanyi 三位于 1994 年一起获诺贝尔经济学奖,他们的工作形成现代博弈论的骨干内容。

J.Nash 于 1959 年患精神分裂症,但其学术成就影响巨大,后继者众,至今他仍健在人世,深受数学界、经济学界和一般民众之敬仰,美国大片《美丽心灵》(A Beautiful Mind)就是以 Nash 的人生为题材拍成的,获 2001 年奥斯卡最佳影片奖。

Selton 是数学家出身,Harsanyi 是经济学家,但他们的工作成果主要是靠数学与统计方法取得的。

1996 年的诺贝尔经济学奖得主是英国数学家 James A. Mirrlees 和美国数学家 William Vickrey,他们的成果亦是与博弈论相关的所谓信息经济学。Vickrey 在获奖后第三天因激动而谢世,亡年 82 岁。

1997 年诺贝尔经济学奖得主是美国数学家 Robert Merton 和经济学家 Myron Scholes,他们用统计与计算机研究数理金融学。

从诺贝尔经济学奖的得主的情况看,只懂得经济学,不懂得数学是很难得此殊荣的。

1973 年,F. Black 和 M. Scholes 把期权定价问题归结为随机微分方程的解,解得著名的期权定价公式,后被 R. Merton 进一步完善,他们的工作不仅在金融界行之有效,有巨大的经济价值,而且对随机分析、随机控制和数理统计以及偏微分方程的发展也有推动作用,1997 年,Merton 与 Scholes 获诺贝尔经济学奖,此项成果的主要人物之一 F. Black 不幸于颁奖前两年去逝。

2 分形与混沌

2.1 分形与分数维

1967年,法国数学家蒙德尔布罗(Benoit B. Mandelbrot)在《科学》上发表《英国的海岸线有多长?》的论文,提出"分形"这个新名词。分形:Fractal,有"碎化、分裂"的含义。1982年,他又出版关于分形的新书《自然界中的分形几何》,当时有人说他是标奇立异,现在他的分形思想已发展成一门叫做"分形几何"的新的数学分支。

海岸线问题由来已久,早在19世纪,人们就发现西班牙、葡萄牙、比利时、荷兰等国的海岸线测量数据与其真实长度偏差甚大,超过了允许误差。1904年,瑞典数学家柯克(H. Von Koch)发明了一种"柯克曲线"。蒙德尔布罗认为海岸线测不准与海岸线破碎的不规则形状有关,他想用状如柯克曲线似的曲线来逼近海岸线。

所谓柯克曲线,是形如图9.4的一种曲线,由柯克首先提出,皮亚拿与希尔伯特等大数学家都参与过此类曲线的研究。

把一线段的中间$\frac{1}{3}$段用以它为底向"外"作的正三角形的两腰替代;得到的各条线段再如此"以两腰替代中间$\frac{1}{3}$段"的办法"向外凸起",依次类推地外凸无穷次形成的曲线称为柯克曲线。所谓"外"凸是沿原来曲线从左向右运行时左手边为"外"。

设原来的线段长1,则柯克曲线长为

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty$$

如果从一个正三角形三边各向外做柯克曲线,则总长度仍为$+\infty$,但它所含的面积却是有限的,而且该曲线点点不光滑,是连续而点点不可微的又一美丽实例。

蒙德尔布罗说:自然界的许多东西都是由简单步骤的重复而

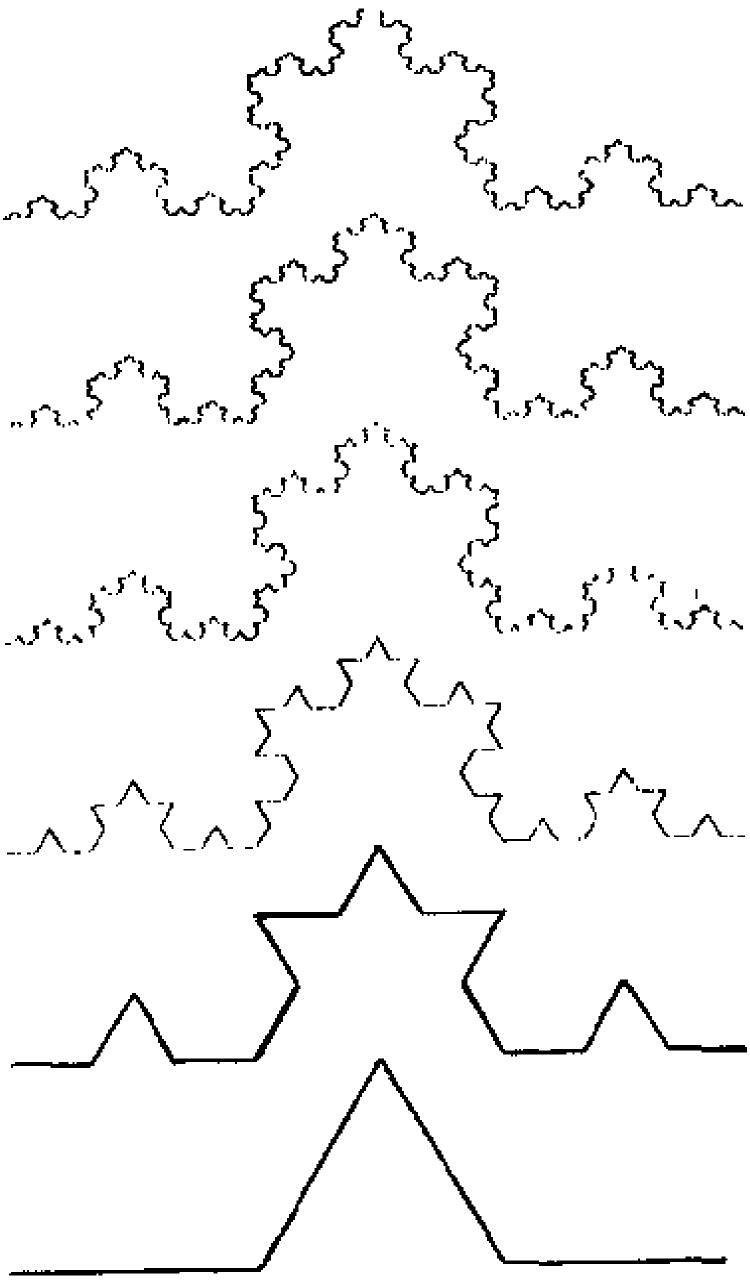


图 9.4

产生出来的,使用分形,我们可以解释为什么相对少量的遗传物质,可以发育成复杂的结构,如肺、大脑乃至整个躯体;也可以解释生物“魔术”是如何用只占人体体积 5% 的血管布满人体的每一部分。

蒙德尔布罗发现了柯克曲线等怪异曲线的“自相似”性,即其整体与部分相似的无限层次的嵌套结构。蒙德尔布罗对这种曲线引人“维数”,他考虑到例如柯克曲线如此之复杂,在有限范围内有

无穷长，说它们如一般曲线段一样是1维的似不准确。他定义了新的维数如下：

如果某图形可由其缩小成$\frac{1}{a}$的b个自相似的图形拼成，则相似性维数定义为

$$D = \frac{\ln b}{\ln a}$$

例如柯克曲线，$b = 4, a = 3$，于是

$$D(\text{柯克曲线}) = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.2618\cdots$$

即柯克曲线不是1维的。

1977年，蒙德尔布罗把有分数维的奇怪图形称为分形。

早在1919年，德国著名的犹太数学家豪斯道夫(Hausdorff Felix, 1868—1942)就提出了非整数维的概念，其中有一种维数的定义为：

把$\mathbb{R}^m$划分成棱长为ε的m维小方盒，再统计有界集$S \subset \mathbb{R}^m$所占据的非空方盒(即方盒中至少有一个S中的点)的个数$N(\varepsilon)$，则定义S的维数为

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$$

由此种维数定义可求得线段是1维的，正方形是2维的，立方体是三维的。

例如康托尔尖集(一线段三等分弃中的无限实施而得)的维数是

$$D_0(\text{Cantor}) = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309297\cdots$$

1977年，蒙德尔布罗又出了一本新书《分形：形，机会与维数》，分形几何引起了学术界的极大关注。

1980年，蒙德尔布罗从复数Z_0开始，用迭代公式

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C$$

进行迭代描点(在IBM公司用计算机绘制)，其中C是复常数，得

到了绰号"数学恐龙"的蒙德尔布罗点集,见图9.5。

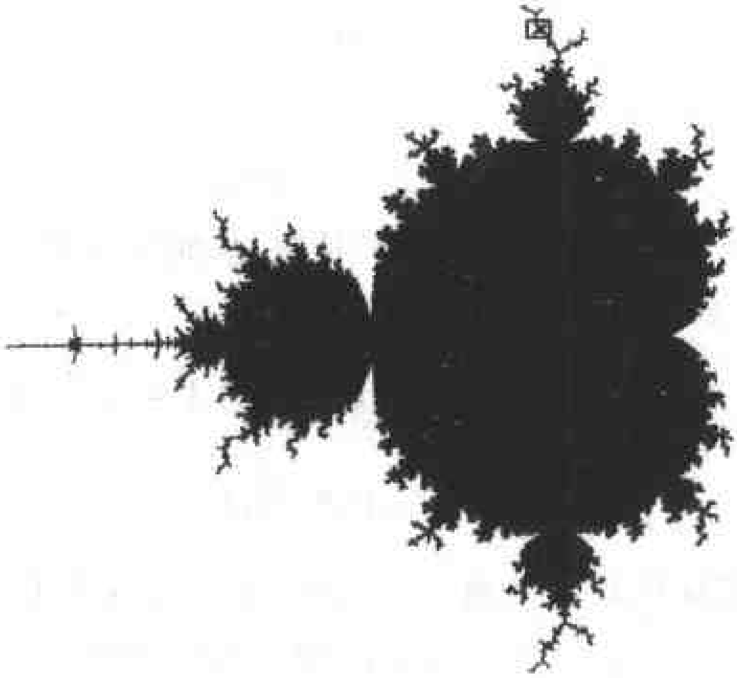


图9.5

2.2 洛伦兹方程与混沌

1963年,美国气象学家洛伦兹(Lorenz)研究大气对流,建立了大气运动的所谓洛伦兹方程组

$$\begin{cases}\dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy\end{cases}$$

其中 x 正比于对流运动的强度,y 正比于水平方向温度变化,z 正比于竖直方向温度变化。

当年洛伦兹取 $\sigma = 10, \beta = \frac{8}{3}, \rho = 28$,于是

$$\begin{cases}\dot{x} = -10x + 10y \\ \dot{y} = 28x - y - xz \\ \dot{z} = -\frac{8}{3}z + xy\end{cases}$$

这个方程组有3个奇点:$O(0,0,0)$,$A(6\sqrt{2},6\sqrt{2},27)$,

$B(-6\sqrt{2},-6\sqrt{2},27)$，$O$ 点的特征根为

$$\lambda_1(0)=-\frac{8}{3},\lambda_2(0)=11.83,\lambda_3(0)=-22.83$$

A 与 B 点的特征根为

$$\lambda_1=-13.85,\lambda_{2,3}=0.094\pm10.19\mathrm{i}$$

O,A,B 3 个奇点都有正实部的特征根，从而都不是稳定奇点。由于线性常系数方程组 $\dot{X}=AX$ 的解是

$$\mathrm{e}^{At}\eta=\sum_{i=1}^{k}\Big[\mathrm{E}+t(A-\lambda_i\mathrm{E})+\frac{t^2}{2!}(A-\lambda_i\mathrm{E})^2+\cdots+\frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}(A-\lambda_i\mathrm{E})^{n_i-1}\Big]\mathrm{e}^{\lambda_i t}v_i$$

其中 n_i 是特征根λ_i 的重数，$\eta=v_1+v_2+\cdots v_k,v_i\in V_i$。

$$V_i=\{\xi\mid(A-\lambda_i\mathrm{E})^{n_i}\xi=0,\xi\in\mathbb{R}^3\}$$

k 是特征根的数目，令 $k=3,n_1=n_2=n_3=1,v_1,v_2,v_3$ 是相应的特征向量，故

$$\mathrm{e}^{At}\eta=\mathrm{e}^{\lambda_1 t}v_1+\mathrm{e}^{\lambda_2 t}v_2+\mathrm{e}^{\lambda_3 t}v_3$$

对于 $O(0,0,0)$，轨线 $\mathrm{e}^{-\frac{8}{3}t}v_1$ 与 $\mathrm{e}^{-22.83t}v_3$ 收敛到 O 点，而另一轨线 $\mathrm{e}^{11.83t}v_2$ 离开 O 点而远行，O 点为鞍—结式相图，对于 A 与 B，相应的轨线 $\mathrm{e}^{-11.85t}v_1$ 表明相应于 $\lambda_1=-13.85$ 的特征线上，有向 A 与 B 收敛的轨线，而相应于 $\lambda_{2,3}=0.094\pm10.19\mathrm{i}$，由于 $0.094>0$，形成与 v_1 正交的平面上的投影为发散螺线的轨线，于是在 A 与 B 点附近形成结—焦式相图，在奇点附近的相图如图 9.6 所示。

取李雅普诺夫函数

$$V=14x^2+5y^2+5(z-56)^2$$

则

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial V}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial V}{\partial z}\dot{z}=$$

$$-10\Big[28x^2+y^2+\frac{8}{3}(z-28)^2-\frac{6272}{3}\Big]=$$

$$\Big(\frac{\partial V}{\partial x},\frac{\partial V}{\partial y},\frac{\partial V}{\partial z}\Big)\cdot(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$$

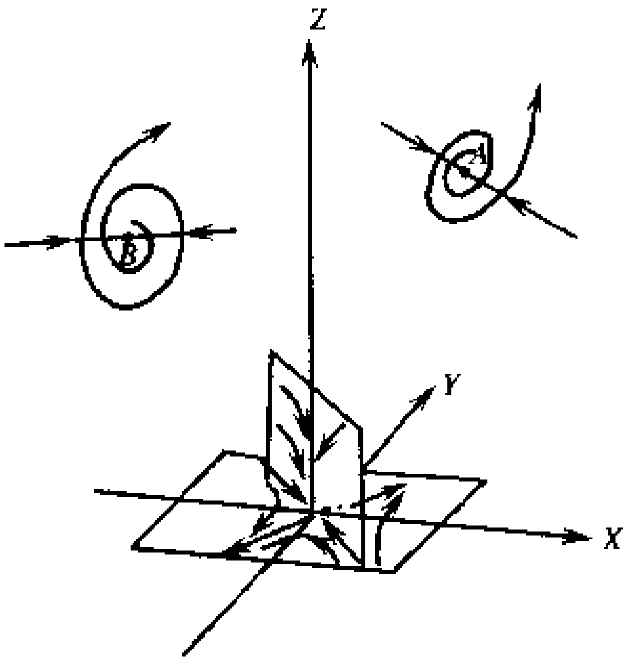


图 9.6

于是在椭球面

$$28x^2+y^2+\frac{8}{3}(z-28)^2=\frac{6272}{3}$$

的外面，$\frac{dV}{dt}<0$，在此椭球面外面包围此椭球的某闭曲面上的轨线皆走入椭面内部，取一个这种曲面

$$14x^2+5y^2+5(z-56)^2=18000$$

则奇点 O,A,B 包围在这一曲面内部区域 D 内。D 区域是洛伦兹方程组轨线的"捕捉区"，在 D 内有吸引子。

有了上述定性分析，心中有数之后，洛伦兹在计算机上进行了他的方程组的具体数值解计算，发现 D 内有一个吸引子，其维数是 2.06，洛伦兹称其为奇怪吸引子；其相图如图 9.7 所示。从 O 点出发的轨线 U'_0 绕 A 附近若干圈后下沉，顺着 U_0 的走向甩到左侧，继而在 B 点附近绕若干圈再下沉，顺 U'_0 的走向甩到右侧，如此忽左忽右地往复徘徊，且每次在 A 点与 B 点附近之绕行圈数是随机的（从 O 点出发的轨线 U_0 的运行情况与 U'_0 的运行情况相似），他的数值计算的结果还发现此轨线下沉前的历次最大值 z_{max} 的相关点聚图形如图 9.8。

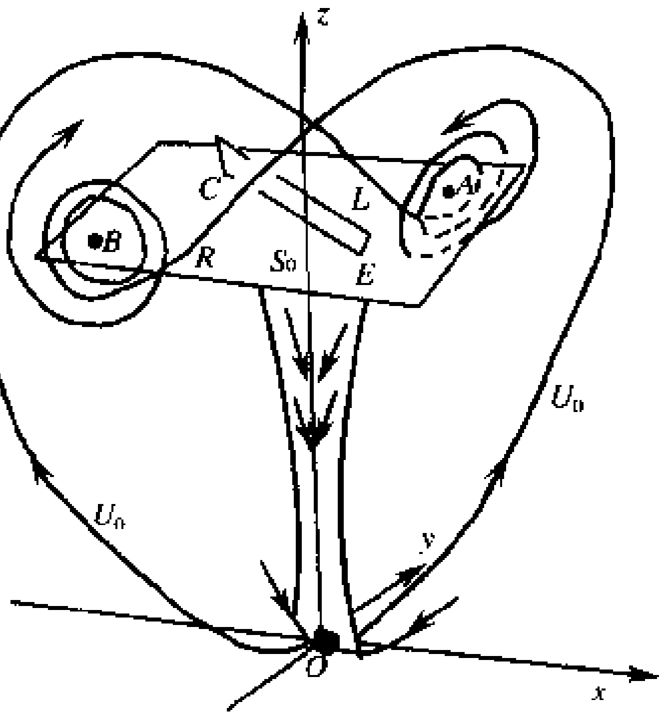


图 9.7

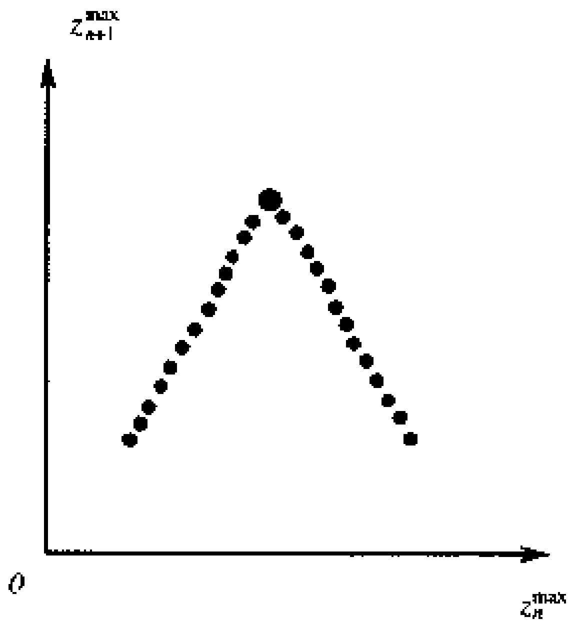


图 9.8

洛伦兹方程的奇怪吸引子状似一只蝴蝶。
图 9.8 的分布图恰似所谓三角帐篷映射 Λ

$$\Lambda: y=\begin{cases}2x, 0\leqslant x<\dfrac{1}{2}\\ 2-2x, \dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

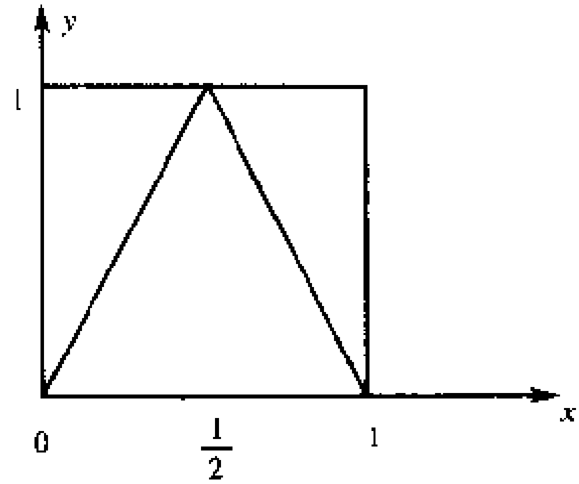


图 9.9

Λ 的迭代为

$$y_{n+1}=\begin{cases}2y_n, 0\leqslant y_n<\dfrac{1}{2}\\ 2-2y_n, \dfrac{1}{2}\leqslant y_n\leqslant 1\end{cases}$$

恰似从 $z_n^{\max}$ 到 $z_{n+1}^{\max}$的点聚图 9.8。

为研究上述迭代形成的轨道性质，首先讨论与之有关的 Bernoulli $\sigma(x)$的迭代：

$$\sigma(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2}\\ 2x-1 & \dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

任取 $x_0\in[0,1]$，在二进制之下，

$$x_0=0.a_1a_2a_3\cdots a_na_{n+1}\cdots, a_i\in\{0,1\}$$

于是

$$x_n=\sigma^n(x_0)=0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots$$

即 σ 的作用是把二进制小数后第一位（头位）的数字删除，故俗称 σ 为“砍头映射”。

用数学归纳法可以证明 $\Lambda^n = \Lambda\sigma^{n-1}$。

Λ 的迭代算法是，$0 \leqslant y_n < \dfrac{1}{2}$ 时，y_{n+1} 就是 y_n 的 σ“砍头映射”之结果；$\dfrac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1$ 时，y_{n+1} 由以下 3 步得到：

(1)小数点向右移一位。

(2)把小数前的非零码删除。

(3)把小数点后的 0 与 1 互换，即 0 改写成 1，1 改写成 0。

事实上，$\dfrac{1}{2} \leqslant y_n \leqslant 1$ 时，

$$y_n = \frac{1}{2} + a_2\frac{1}{2^2} + a_3\frac{1}{2^3} + \cdots + a_n\frac{1}{2^n} + \cdots, a_i \in \{0,1\}$$

$$\begin{aligned} 2-2y_n &= 2-2\left(\frac{1}{2} + a_2\frac{1}{2^2} + a_3\frac{1}{2^3} + \cdots + a_n\frac{1}{2^n} + \cdots\right) = \\ & 1-\left(a_2\frac{1}{2} + a_3\frac{1}{2^2} + \cdots + a_n\frac{1}{2^{n-1}} + \cdots\right) = \\ & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) - \left(a_2\frac{1}{2} + a_3\frac{1}{2^2} + \cdots + a_n\frac{1}{2^{n-1}} + \cdots\right) = \\ & \bar{a}_2\frac{1}{2} + \bar{a}_3\frac{1}{2^2} + \cdots + \bar{a}_n\frac{1}{2^{n-1}} + \cdots = \\ & 0.\bar{a}_2\bar{a}_3\bar{a}_4\cdots\bar{a}_{n-1}\bar{a}_n\cdots \end{aligned}$$

其中 $\bar{a}_i = \begin{cases} 0, & a_i = 1 \\ 1, & a_i = 0 \end{cases}$

可见上述步骤(1)、(2)、(3)是正确的。

Λ 迭代(从而洛伦兹的 $z_n^{\max}$)有以下 3 个主要性质。

(1)Λ 对初值敏感依赖

在二进制中取两个十分靠近的初值

$$x_0 = 0.a_1a_2\cdots a_{n-1}0\ a_{n+1}a_{n+2}\cdots$$

$$x'_0 = 0.a_1a_2\cdots a_{n-1}0\ a'_{n+1}a_{n+2}\cdots$$

其中 $a_{n+1} \neq a'_{n+1}$，于是

$$\Lambda^n(x_0) = \Lambda\sigma^{n-1}(x_0) = \Lambda(0.0a_{n+1}a_{n+2}\cdots) = 0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots$$

$$\Lambda^n(x'_0) = 0.a'_{n+1}a_{n+2}\cdots$$

可见 Λ 的 n 次作用后，结果之差为$\frac{1}{2}$。即本来两个相差极小的初值，经 Λ 迭代之后可以产生十分可观之偏离。

(2)Λ 的拓扑传递性

任取 $x_1=0.b_1b_2\cdots b_m\cdots, m\gg1$，再任取 $x_0\in(0,1)$，可设 x_0 是无理数，由于[0,1]区间内几乎所有的无理数在二进制表示中可以无限次找到事先任意指定的由 0 与 1 组成的数字段 $b_1b_2\cdots b_m$；所以不妨设(任取[0,1]内一点 x_0 为无理数的概率为 1)。

$$x_0=0.a_0a_1a_2\cdots a_n\,0\underbrace{b_1b_2\cdots b_m}\cdots0\underbrace{b_1b_2\cdots b_m}\cdots$$

于是

$$\Lambda^{n+1}(x_0)=\Lambda\sigma^n(x_0)=0.b_1b_2\cdots b_m\cdots$$

$$|\Lambda^{n+1}(x_0)-x_1|<\frac{1}{2^m}$$

可见，从(0,1)内取无理数 x_0，从 x_0 出发的轨道

$$\sigma^0(x_0)=x_0,\sigma^1(x_1)=x_1,\sigma^2(x_0)=x_2,\cdots,\sigma^n(x_0)=x_n,\cdots$$

中有无穷项与指定的点 $x_1\in[0,1]$之距离小于$\frac{1}{2^m}$，$m\gg1$，m 任取定。即从 x_0 出发的轨线有拓扑传递性，此轨线可以走访每个点 $x\in[0,1]$无穷次，可与 x 之距离任意小，即轨道对[0,1]上的每个点无穷次聚散。

(3)Λ 的周期点在[0,1]上处处稠密

任取 $x_1=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots\in[0,1]$，考虑 $x_0=0.\dot{0}a_1\cdots\dot{a}_n$，则

$$\Lambda(x_0)=0.\dot{a}_1a_2\cdots a_n\dot{0}$$

$$\Lambda^{n+1}(\Lambda(x_0))=\Lambda\sigma^n(\Lambda(x_0))=\Lambda(x_0)$$

即 $\Lambda(x_0)$是 Λ 的周期点，而

$$|\Lambda(x_0)-x_1|\leqslant\frac{1}{2^n},n\gg1$$

可见[0,1]上任一点的任意邻域中皆有 Λ 的周期点，即 Λ 周期点在[0,1]上处处稠密。

洛伦兹从此发现$\{z_n^{max}\}$序列是具有以上 3 种怪异性质的紊动，他称这种现象为蝴蝶效益，且形象地说："巴西的一只蝴蝶扇动翅膀，可以引发德克萨斯州的一场龙卷风。"

上述 Λ 迭代早在 1837 年就已由荷兰数学生物学家弗尔哈斯特(Verhulst)引出，他研究人口问题时，使用了迭代

$$p_{n+1} = kp_n(1 - p_n)$$

称这一迭代为"逻辑斯蒂"迭代，当 $k = 4$ 时，则变成

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$$

令 $x = \sin^2\left(\frac{\pi y}{2}\right)$，$y \in [0,1]$，则

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}y_{n+1}\right) = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}y_n\right)\left[1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}y_n\right)\right] = \sin^2(\pi y_n)$$

于是 $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$等价于

$$y_{n+1} = \begin{cases} 2y_n, & 0 \leqslant y < \frac{1}{2} \\ 2 - 2y_n, & \frac{1}{2} \leqslant y_n \leqslant 1 \end{cases}$$

Λ 映射的实际模型是厨师的"抻面"，把一根一定长度的用精制面粉做的面泥条拉长成原来长的 2 倍，且拉抻是均匀的，把右手的一端交给左手，右手抓住中点，继续拉长成 2 倍，依次反复进行拉伸折叠 n 次。由于 Λ 有拓扑传递性，可以把面条中的水分等各种分布搞得很均匀。1998 年，中国中央电视台播出一位高级厨师的抻面表演，把一根面条拉伸折叠了 50 个回合，面条拉成原来的$\frac{1}{2^{50}}$那么细，比头发丝还细，创立了一项吉尼斯世界记录。

拉伸折叠这种简单而确定的运动反复多次之后，产生了激烈的预想不到的变化，这就从数学上严格地揭示了大量的非线性系统，如果存在混沌运动，则不可长期预报了！

1814 年，拉普拉斯时代尚无混沌理论、他在《概率的哲学导论》中说："如果有一位智慧之神，在给定时刻能够识别出赋予大自然以生机的全部的力量和组成万物的个别位置，而且他有足够深

邃的睿智能够分析这些数据,那么他将把宇宙中最微小的原子和庞大的天体运动都包括在一个公式之中,没有什么东西是不确定的,未来就如同过去那样是完全确定无疑的。”

洛伦兹发现混沌之后,美国科学家詹姆斯·格莱克说:“混沌学排除了拉普拉斯决定论的可预测性的狂想。”但爱因斯坦仍不太理解混沌的本质,他坚持说:“我无论如何深信上帝不是在掷骰子。”

20世纪70年代以来,在生态、超导、催化反应、心血管疾病、非线性振动、三极管电路、大气运动、天体力学和人类社会活动等领域都发现了混沌现象,即运动对初值敏感依赖,且有处处稠密的周期点和拓扑传递(遍历)性。在确定的规律支配下,众多非线性系统中发生不可预期的魔鬼般变化。

1964年,乌克兰数学家沙可夫斯基(Sarkovski)创立了著名的沙可夫斯基定理:

设 f 是 $[0,1]\to\mathbb{R}$ 的连续映射,f 有 m 周期点,则 f 有 Sarkovski 序列中 m 之后的一切自然数为周期的周期点,Sarkovski 序列指

$$\underbrace{3,5,7,\cdots}_{\text{奇数列}},\underbrace{3\times2,5\times2,\cdots}_{\text{2倍奇数列}},\underbrace{3\times2^2,5\times2^2,\cdots}_{\text{2}^2\text{倍奇数列}},\cdots\cdots$$

$$\underbrace{\cdots\cdots}_{2^k\text{倍奇数列}},\cdots\quad\underbrace{\cdots2^4,2^3,2^2,2,1}_{\text{降幂的2的幂序列}}$$

此定理指出若连续映射 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 有3周期点,则有任意 k 周期点,$k\in\mathbb{N}$。

Λ 迭代序列就是对 Sarkovski 定理的一个很具体的例证。

20世纪60年代,美国数学家斯梅尔(Smale Stephen,1930—)发明了一种所谓 Smale 马蹄映射 φ,制造了一个奇怪不变集 Λ_0,$\varphi(\Lambda_0)=\Lambda_0$,$\Lambda_0$的维数是

$$D_0=\frac{\ln4}{\ln5}$$

φ 对 Λ_0 的映射造成的轨道有三角帐篷映射 Λ 的那3条性质:对初值敏感依赖、拓扑传递性和周期点处处稠密。

Smale 奇怪不变集 Λ_0 的制作过程如下。

斯梅尔考虑二维映射

$$\varphi: \bar{R} \to \mathbb{E}^2$$

其中 $\bar{R}$ 是正方形$\{0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$，$\varphi$ 是把此正方形 $\bar{R}$ 在 y 方向拉长 μ 倍($\mu>2$)，在 x 方向上压缩 λ 倍($\lambda<\frac{1}{2}$)，形成一个竖直长方形，然后把此长方形变成马蹄形，把“马蹄”压在 $\bar{R}$ 上，使马蹄与 $\bar{R}$ 之交是两个全等长方形，其边与坐标轴平行，φ 称为斯梅尔马蹄映射，见图 9.10。

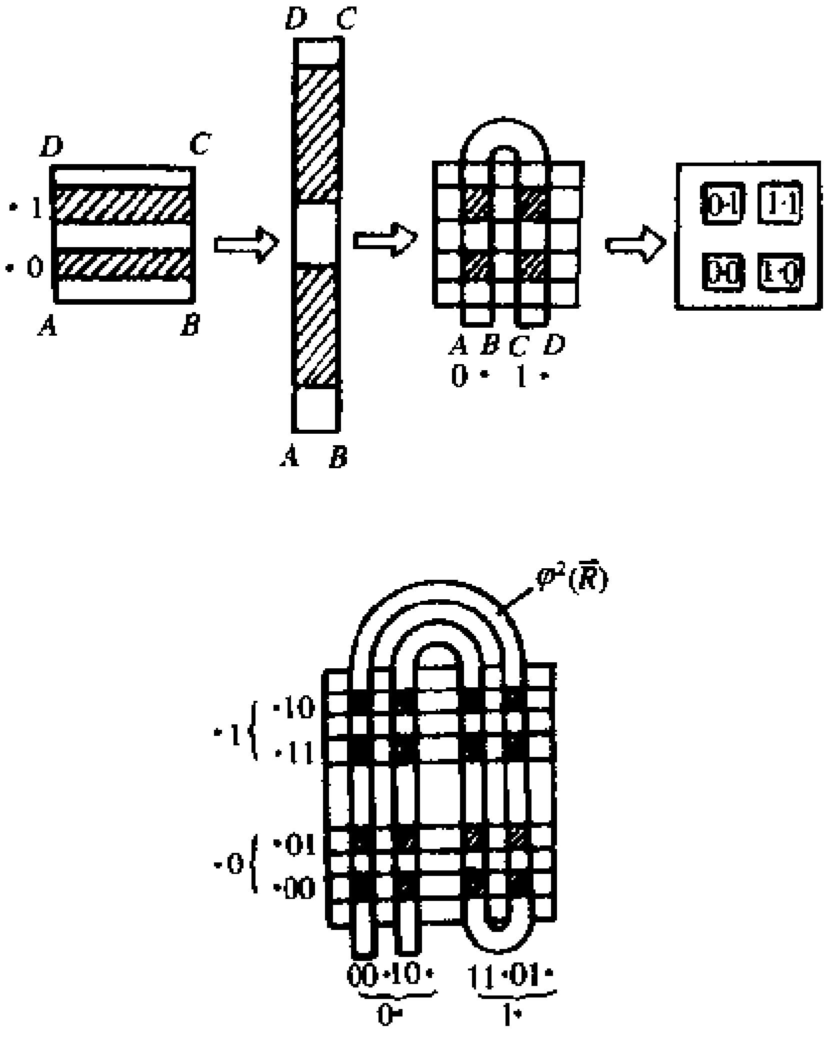


图 9.10

这种映射又是拉伸与折叠，它的反复实施造成混沌。

令 $V=\varphi(\bar{R})\cap\bar{R}=V_0\cup V_1, V_0\cap V_1=\varnothing$

V 的逆像

$U=\varphi^{-1}(V)=U_0\cup U_1, U_0\cap U_1=\varnothing$

竖直长条 V_0 与 V_1,水平长条 U_0 与 U_1 的宽度都小于$\frac{1}{2}$,当 $\mu\lambda=1$ 时,U_0,U_1,V_0,V_1 是 4 个全等形,它们的交是 4 个小正方形:

$$\Lambda_1=\varphi^{-1}(\bar{R})\cap\bar{R}\cap\varphi(\bar{R})$$

对 U_0,U_1,V_0,V_1 分别编码$\cdot 0,\cdot 1,0\cdot,1\cdot$,相应地,4 个小正方形分别编码$0\cdot 0,0\cdot 1,1\cdot 0,1\cdot 1$。

$$\Lambda_1=(0\cdot 0,0\cdot 1,1\cdot 0,1\cdot 1)$$

因为 $\varphi(\Lambda_1)=\bar{R}\cap\varphi(\bar{R})\cap\varphi^2(\bar{R})\subset\bar{R}$,即 Λ_1 在 φ 的作用下跑不出 $\bar{R}$;同样地,$\varphi^{-1}(\Lambda_1)\subset\bar{R}$,即 Λ_1 在 φ^{-1}作用下也留在 $\bar{R}$ 上。

再作 $\varphi^2(\bar{R})$,它与 $\bar{R}\cap\varphi(\bar{R})$交于 4 条竖条,类似地记之为

$$\bar{R}\cap\varphi(\bar{R})\cap\varphi^2(\bar{R})=(00\cdot,01\cdot,10\cdot,11\cdot)$$

它是由 V 中两竖条经φ 作用后生成的,同样此 4 竖条经 φ^{-2}的作用生成 4 横条记成

$$\varphi^{-2}(\bar{R})\cap\varphi^{-1}(R)\cap\bar{R}=(\cdot 00,\cdot 01,\cdot 10,\cdot 11)$$

4 竖条与 4 横条交出 16 个小正方形组成集合 Λ_2

$$\begin{aligned}\Lambda_2=&\varphi^{-2}(\bar{R})\cap\varphi^{-1}(\bar{R})\cap\bar{R}\cap\varphi(\bar{R})\cap\varphi^2(\bar{R})=\\&(00\cdot 00,00\cdot 01,00\cdot 11,00\cdot 10,10\cdot 00,10\cdot 01,10\cdot 11,\\&10\cdot 10,11\cdot 00,11\cdot 01,11\cdot 11,11\cdot 10,01\cdot 00,01\cdot 01,\\&01\cdot 11,01\cdot 10)\end{aligned}$$

Λ_2 上的点经 $\varphi,\varphi^2,\varphi^{-1},\varphi^{-2}$的作用仍在 $\bar{R}$ 上。

依次类推得集合

$$\begin{aligned}\Lambda_n=&\varphi^{-n}(\bar{R})\cap\varphi^{-(n-1)}(\bar{R})\cap\cdots\cap\varphi^{-1}(\bar{R})\cap\bar{R}\cap\varphi(\bar{R})\\&\cap\varphi^2(\bar{R})\cdots\cap\varphi^n(\bar{R})\end{aligned}$$

Λ_n 由 2^n 个小正方形组成,每个小正方形用一个 0－1 数串表示成

$$a_{-n}a_{-(n-1)}\cdots a_{-1}a_1a_2\cdots a_n$$

Λ_n 上的点经φ 的k 次($k\leqslant n$)映射与逆映射,仍在 $\bar{R}$ 上,令 $n\to+\infty$,得 φ 的不变集

$$\Lambda_0=\lim_{n\to\infty}\Lambda_n$$

Λ_0 上的点不论映射或逆映射多少次,仍留在 $\bar{R}$ 上,Λ_0 是无穷点

集，每个点由 0－1 双向无穷码串表示，它有分数维，例如 $\mu=\frac{1}{\lambda}=5$ 时，其维数是

$$D_0(\Lambda_0)=\frac{\ln 4}{\ln 5}$$

Λ_0 是个奇怪不变集，且从 $\Lambda_1,\Lambda_2,\cdots$ 的编码过程可知，φ 对 Λ_0 的作用就是"小数点"向右移位，可以类似于映射 $\sigma(x)$ 相似地证明 φ 是 Λ_0 上的混沌映射。

斯梅尔马蹄映射在微分动力系统中是考察是否混沌的一个极有力的工具。

斯梅尔是美国有名的现代数学家，1930 年生于密歇根州弗林特，1952 年毕业于密歇根大学，1956 年获博士学位，1961 年任密歇根大学教授，因研究微分拓扑学取得极重要成果而获得 1965 年的维布伦奖和 1966 年的菲尔兹奖，是现代抽象动力系统创始人之一。他在应用数学方面的成果亦为世人瞩目，例如对力学、统计力学、湍流、生物学、运筹学和数理经济学，都有不平凡的成果。

1975 年，中国数学家李天岩和美国数学家约克（York）对混沌给出如下的定义，首次使用混沌（Chaos）一词：

若 $f:X\to X$ 是连续映射，X 是紧的度量空间，且 f 的周期集 $\mathrm{p}(f)=\mathrm{N}$，又存在 $S_0\subset X-\mathrm{per}(f)$，满足

(1) $\limsup\limits_{n\to\infty} d\,(f^n(x),f^n(y))>0,\ \forall\, x,y\in S_0,\ x\neq y$；

(2) $\liminf\limits_{n\to\infty} d\,(f^n(x),f^n(y))=0,\ \forall\, x,y\in S_0$；

(3) $\limsup\limits_{n\to\infty} d\,(f^n(x),f^n(p))>0,\ \forall\, x\in S_0,\ \forall\, p\in\mathrm{per}(f)$，其中 $\mathrm{per}(f)$ 是 f 的周期点集，则称 S_0 是混沌集，f 是 X 上 Li-York 意义下的混沌映射，其中 $d(\cdot,\cdot)$ 是 X 上的距离。

同年李天岩和约克证明了下面的定理：

设 $f:I\to I$ 的连续映射，$I=[0,1]]$，f 有周期 3 的点，则

(1) $\mathrm{p}(f)=\mathrm{N}$　（$\mathrm{p}(f)$ 是 f 的周期集）。

(2) 存在不可数集 $S_0\subset I-\mathrm{per}(f)$，满足

① $\lim\limits_{n\to\infty}\sup|f^n(x)-f^n(y)|>0, \forall x,y\in S_0, x\neq y$;

② $\lim\limits_{n\to\infty}\inf|f^n(x)-f^n(y)|=0, \forall x,y\in S_0$;

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\sup|f^n(x)-f^n(p)|>0, \forall x,\in S_0, \forall p\in \mathrm{per}(f)$。

这个定理指出有周期 3 的到自身的连续映射则意味着混沌。

若 D 是紧度量空间，$f: D\to D$ 是连续映射，且(1)f 对初值敏感依赖；(2)f 有拓扑传递性；(3)f 的周期点在 D 内处处稠密，则称 f 是 Devaney 意义下的混沌。

1977 年，国际第一届混沌会议在意大利召开，标志着新的数学分支混沌正式诞生。

1963 年，梅尔尼科夫(Melnikov)对于平面哈密顿系统微扰后是否产生混沌给出了解析判据。

梅尔尼科夫研究方程

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x,t) \tag{9.1}$$

其中

$$x=\begin{pmatrix}u(t)\\ v(t)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2, f(x)=\begin{pmatrix}f_1(u,v)\\ f_2(u,v)\end{pmatrix}\in C^r$$

$$g(x,t)=\begin{pmatrix}g_1(u,v,t)\\ g_2(u,v,t)\end{pmatrix}\in C^r, r\geqslant 2$$

$g(x,t)$是 t 的周期函数，周期为 T。$\varepsilon=0$ 时，方程(9.1)为哈密顿系统，即存在哈密顿函数 $H(u,v)\in C^r$，使得 $f_1=\dfrac{\partial H}{\partial v}, f_2=-\dfrac{\partial H}{\partial u}$，且 $\varepsilon=0$ 时，方程(9.1)有鞍点 p_0，以及连接 p_0 的同宿轨线 $q^0(t)=(u^0(t),v^0(t))$。梅尔尼科夫给出所谓梅尔尼科夫函数

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(q^0(t-t_0))\Lambda g(q^0(t-t_0),t)\mathrm{d}t$$

若 $M(t_0)$有不依赖于 ε 的零点 $t_0=\tau$，即 $M(\tau)=0$，τ 与 ε 无关，且 $t_0=\tau$ 是 $M(t_0)$的单量零点，即$\dfrac{\mathrm{d}M(t_0)}{\mathrm{d}t_0}$在 $t_0=\tau$ 处不为零，则方程(9.1)的轨线会出现混沌运动。

梅尔尼科夫函数是迄今为止最像样的混沌判别法之一，它通

过 g, f, q^0 的一个解析式的积分来计算是否有混沌轨线,此方法有解析表达的优势,其中运算"Λ"规定为

若 $a=(a_1,a_2), b=(b_1,b_2)$,则 $a\Lambda b=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$。

如果 $\varepsilon=0$ 时,(α)有 n 个鞍点 $p_1, p_2, \cdots, p_n, n\geqslant 2$,从 p_i 到 p_{i+1}有轨线 $q_i^0(t), i=1,2,\cdots,n-1$,从 p_n 到 p_1 有轨线 $q_n^0(t)$,形成一个异宿圈,梅尔尼科夫得出关于第 i 条异宿轨线的梅尔尼科夫函数如下

$$M_i(to)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(q_i^0(t))\Lambda g(q_i^0(t), t+t_0)\mathrm{d}t$$

当 $M_i(t_0)$有单重零点时,会出现轨线的混沌运动。

第十章　数学史的启示

至今已有25个世纪之久的这段时期，数学家们一直在改正他们的错误，而且看到了这门学科欣欣向荣而不是枯竭衰败，这使得他们对未来充满希望。

——布尔巴基

1　数学的源泉与数学文化

数学概念是从哪里来的？著名数学家冯·诺依曼答曰："数学的概念来源于经验。"数学的历史证实诺依曼的回答是正确的。但他作为一个伟大的数学家，同时对数学的本质做了深刻的剖析，他指出，数学是人类智能的中心领域，不是一门经验科学，但与自然科学和生活实际的特有联系，是数学的特点之一，例如几何学，我们已经看到，它起源于自然和经验；古巴比伦人，古希腊人，古中国人和古印度人等，他们谁人没有看见圆圆的月亮和平静的水面，在生活中他们把石头打磨成各种形状的工具，手里拿的或许是某一种多面体，尼罗河泛滥过后要重新丈量和划分土地等。于是人们有了多边形、多面体、圆和球等经验，但这还不是数学，只有欧几里得把这些经验进行"数学地加工"，例如他把圆定义成"圆是这样的平面图形，它包含在一条曲线(把它叫做圆周)的内部，从图形内某一点到这曲线上(圆周上)所有各点的直线段彼此相等"(见《几何原本》卷一定义15)。欧几里得摘出来的这个定义来源于自然，但与自然界的圆形物有本质区别，因为欧几里得的"数学圆"是抽象的、严格的、高度概括的，欧几里得定义的"数学圆"与现实的圆东西是不一样的，难道自然界真的存在严格准确的圆吗？欧几里得

的公理化处理使几何进一步脱离经验向前跨了一大步,这一步正是值得庆祝蹬数学进步。但应承认,从数学概念的形成,到其公理(理论)体系的建立,都是由人类的经验促成的,这里显示了数学的两面性,一面是源于经验,一面是脱离经验。

数学史上回答数学从哪里来的这一问题的另一个非平凡的史实是微积分的诞生。微积分的重要性,对它作任何估价,都不会认为是过高的。微积分的起源显然是经验的,中国人曰:“一尺之棰,日取其半,万世不竭”是一种层次不低的经验,刘徽与祖暅“其幂即等,则其积不容异”的等幂等积定理源于经验;阿基米德对圆柱及其内切球以及一个高与底半径等于球直径的圆锥的联合体的“切片平衡法”求得球体积的高明的力学方法也是积分的经验之源。微积分的那些主要成果确实起源于物理学,“流数”本质上是力学的思考。微积分和力学,由于两者密切结合而共同得到发展,初期的微积分的陈述是用半物理的方式给出的,一个明确无误的回答是牛顿的微积分起源于经验和自然科学。

虽然对牛顿与莱布尼兹的微积分没有数学家排斥它,但它确实距数学意义下的抽象性和严格性还差得很远,可以说并不及格。只有到柯西、外尔斯特拉斯等给出“$\varepsilon-\delta$”、“$\varepsilon-N$”等极限、连续、导数、微分、积分等严格定义之后,才取得了数学合格证。

综上可知,数学之源是经验与自然科学,但必须经过数学家(有时是几代数学家)严格的精细加工。这种加工是高度抽象的思维加工,使之概念明确,推理严格,整体内容无矛盾才称得起是数学。

值得注意的是,有些数学内容,已经很难相信它是起源于经验或自然科学了,它的非数学的经验与自然科学的源泉已是不可追溯的,如果一定要追溯的话,也是相当之间接甚至无从查找了,例如矩阵的行列式及其特征根、$\sqrt{-1}=i$、超越数理论等。可见,数学科学自身的需求也是数学的一种源泉,当然这种内容不是数学的首批概念,所以可以认为是原始概念经验源泉的衍生物,其“祖先”也源于经验。对这些内容,我们称之为数学发明,其余的内容

则是数学发现。

现代数学当中创造性的内容,或者说"发明"的内容之比重越来越多,例如我们可以说罗巴切夫斯基发明了非欧几何,希尔伯特发明了 Hilbert 空间,如果改称"发现",则明显不妥。

目前纯数学之发展有越来越不通俗,离开经验源泉越来越远的倾向。对此,不少数学家已经有所注意,例如冯·诺依曼说:"数学概念来源于经验,尽管有时其系谱是长远的和曲折的;一旦它们被想出来,这个主题便按自己特有的活力生长,并且在几乎完全按美学动机创造。但是我们需要进一步强调,如果一门数学学科远离它的经验来源,或者说,如果仅仅是间接地来自"现实性",是由现实激励生成的第二代和第三代学科的话,这是一个最大的危险,它将变得愈来愈美学化,愈来愈艺术化。如果某个领域是由相关联的仍然与经验紧密相联的学科围绕着的话,这不是坏事,但是有一种重大的危险,学科只沿着远离根源的流一直持续展开下去,并且分割成多种没有意义的分枝,该学科将变成一种繁烦的堆积。换言之,远离经验来源,一直处于"抽象的"近亲交配之中,一门数学学科将有蜕化的危险。开始时,风格是古典的,当它显示出怪异时,危险就来了。不管它已达到什么阶段,仅有的补救办法是回复到源泉去,把它或多或少地重新对应到经验概念中去,这些要求过去是保持学科的生气勃勃和有效性的必要条件,今后,它同样将仍然是正确的。"

这位"计算机之父"又说:"最大的灵敏来源于自然科学。数学方法渗透和支配着自然科学的许多"理论"分支。在现代经验科学当中,能否接受数学方法或与数学相近的物理方法,已愈来愈成为该学科成功与否的主要标准。自然科学被打上数学的烙印,几乎和科学进步的理念一致,变得越来越明显了,人们必须理解它,接受它,并且把它吸收到自己正在思考的主题中去。"

以上谈的就是数学的源泉、数学脱离实际的发展以及数学的归宿。冯·诺依曼的观点是积极的、可取的。

数学不是实用主义的奴仆和工具,它是独立的一种科学和一

种文化。例如我们不能责问"证明费马大定律有什么实用价值"这种性质的问题。事实上,提出数学问题,促进数学繁荣是古今数学的生命线,没有需要解决的数学问题,数学的生命就寿终正寝了。为了一个数学难题的解决,往往要发明一系列数学概念与定理,所以重大数学难题是"会下金蛋的鹅"。P.A.格列菲斯称,数学在人类科学文化当中,已经从伙计变成了伙伴。高斯说:"数学是科学的女皇。"A.N.怀德海则说:"纯数学这门科学在其现代发展阶段,可以说是人类精神之最具独创性的创造。"柏拉图毫不客气地说:"如果谁不知道正方形的对角线与其边是不可通约的量,那他就不配人的称号。"

数学的历史告诉我们,数学也是一种文化。

美国数学史家M.克莱因说:"数学一直是形成现代文化的主要力量,是文化的极其重要的因素。"事实上,数学不仅仅是对科学家、工程师或经济学家才有用的一种技术与工具,它在形成现代思想和文化生活当中起着越来越大的作用,由于人们在学校里受过科班的数学教育,使得人们的思维习惯与语言表达趋于严密和精炼,在辩论与法律活动中,推理无懈可击。数学家超脱的性格和丰富的想象力,使数学概念充满着史诗般的艺术性。美学原则几乎成了判断一个数学成果优劣的准则之一。"罗素说:"数学,如果正确地看待它,则发现它具有至高无上的美,一种冷色而严肃的美,这种美没有音乐或绘画那般华丽的装饰,它可以纯净到崇高的地步,能够达到只有最伟大的艺术才能显示的那种完美的境地;一种真实的喜悦的精神,一种精神上的亢奋,一种高于普通人的意识,这些至善至美的标准,能在诗里得到,也能在数学里得到。"事实上,当我们研究柯克曲线时,当我们研究极限环时,当我们研究图的着色和拉姆赛数时,当我们研究每一个数学分支中的每个非平凡的问题时,我们那种精神上的享受和感悟正是数学这种高文化的美学效应,数学确为一种具有特有的完美性的艺术。

实用的、科学的、美学的和哲学的因素,共同促进着数学的发展,例如罗巴切夫斯基几何这种非平凡的成就正是数学中充满想

象、逻辑、哲学和美学的文化特征的体现。

数学的另一个文化气质是它的语言之极端简洁和绝对准确，而语言是否简洁与准确是一种文化质量高低的体现。例如甲说："有一个直角三角形，画两个以该三角形的直角边为其边的正方形，再画一个以该三角形斜边为边的正方形，那么第三个正方形的面积就等于前面两个正方形面积的和。"乙(是一位数学家)则说："直角三角形直角边的平方和等于斜边的平方。"我们从此已经真切看到乙的话是多么简洁而准确，因为乙讲的是数学语言。

数学是一种理性的精神，它并不排斥异己，欧氏几何与非欧几里得几何同时存在，双方都视对方为科学，这种互相包容的精神是现代文明的特征之一。一个时代的总的文化特征在很大程度上与这个时代的数学活动密切相关。数学的黄金时代不是欧几里得时代，而是我们这个时代，我们会看到现在这个时代的科学与文化是如何受惠于数学。

2　数学的严格性和3个数学学派

数学主要是从经验与直觉中抽象出来的，但它的研究对象是抽象出来的不可触摸的抽象概念，如果用直觉的办法去研究，而不是用严格的公理—定义—定理—证明的数学方法来研究，会得出荒诞的结果。数学有数学的"游戏规则"，它不同于物理，更不同于技术。例如凭我们的直觉，我们岂能相信点点不可微的连续函数之存在呢！但是我们看到了不少可以严格证明其点点不可导却是连续函数的实例。直觉为什么能欺骗我们呢？事实上，凭想象，我们怎么想也想不出一条没有粗细和宽度的曲线！更有甚者，我们又该怎样想象$\sqrt{-1}$这个数呢?！必须先有原始定义和公理系统，再经逻辑的严格推理，才能是称得起为数学的数学，在推理中禁止诉诸直观。但是直觉是数学的命根，例如：

(1)等于第三个量的两个量相等。

(2)若一定理对数1为真，假设它对 n 为真，如果我们能证明

它对 $n+1$ 亦真，则它对一切自然数皆真。

(3)设在一直线上，C 点在 A 点与 B 点之间，D 点在 A 点与 C 点之间，则 D 点在 A 点与 B 点之间。

我们知道，(1)、(2)、(3)都是数学中的著名公理，它们的成立皆依靠直觉而无需证明，可见直觉是数学的源头。庞加莱说："纯逻辑永远也不能使我们得到任何新东西，任何科学也不能仅仅从它产生出来。"

不进行严格的推理，产生数学谬论与笑话的事层出不穷，兹举例如下。

(1)交错级数

$$1-1+1-1+1-1+\cdots$$

在微积分的初期，数学家由于没有严格的级数收敛性概念，曾认为此级数的和是 $0,\frac{1}{2}$ 和 1：

$$1-1+1-1+1-1+\cdots=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+\cdots=0$$

$$1-1+1-1+1-1+\cdots=1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\cdots=1$$

还有些人认为此级数之和等于 0 与等于 1 的可能性一样，所以其和应为 $\frac{1}{2}(0+1)=\frac{1}{2}$。

(2) $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots$，这个级数确实收敛，但若不严格推理，则会得出 $1=\frac{1}{2}$ 之谬：

$$S=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots=$$

$$(1-\frac{2}{3})+(\frac{2}{3}-\frac{3}{5})+(\frac{3}{5}-\frac{4}{7})+\cdots=$$

$$1-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{3}{5}+\frac{3}{5}-\frac{4}{7}-\cdots$$

由于除第一项外，其余各项皆消去了，所以 $S=1$。

$$S=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\frac{1}{2}(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\cdots=$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{14}+\cdots$$

由于除第一项之外,其余各项皆消去了.所以 $S=\frac{1}{2}$,从而得 $S=1=\frac{1}{2}$。

(3) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\bigg|_{-1}^{1}=-2$,但$\frac{1}{x^2}>0$,所以此积分不应为负数。

(4)解方程$\frac{x+5}{x-7}-5=\frac{4x-40}{13-x}$。

解 由$\frac{x+5}{x-7}-5=\frac{(x+5)-5(x-7)}{x-7}=\frac{4x-40}{7-x}$,
只需解方程

$$\frac{4x-40}{7-x}=\frac{4x-40}{13-x}$$

由于上式分子一样,所以分母亦应相等,故得

$$7-x=13-x$$

$$7=13$$

(5)"定理" 若 a 与 b 是两个自然数,且 $\max\{a,b\}=n$,则 $a=b$。

证 $n=1$ 时,即 $\max\{a,b\}=1$,又 a 与 b 是自然数,所以 $a=b$,定理成立。

假设 $n=k$ 时定理已成立,下证 $n=k+1$ 时,定理亦成立。

事实上,令 $\alpha=a-1,\beta=b-1$,由于 $\max\{a,b\}=k+1$,则 $\max\{\alpha,\beta\}=k$,由归纳法假设,$\alpha=\beta$,进而 $\alpha+1=\beta+1$,即 $a=b$,由数学归纳法知,定理成立,证毕。

(6)$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{1}=1$,又$\sqrt{-1}=i$,$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=i\cdot i=-1$,所以$-1=1$。

可见,在数学工作当中,稍不严谨,就会酿成大错,逻辑不严密是十分要命的事。

数学符号的发明与运用对数学也是至关重要的,正是依靠这些数学符号,使数学家在进行复杂运算与思考时能应对自如,它使

数学语言内涵丰富而无歧义。例如逻辑符号 $\wedge$, $\vee$, $\neg$,积分号 $\int_a^b$,微分号 $\frac{d}{dt}$,求和号 $\sum_{i=1}^{n}$ 等。数学符号的使用使数学的逻辑严密性发展到形式化公式化的程度。

1902 年罗素提出的关于集合论的悖论,使对数学严密性与数学基础十分关心的数学家们从不同的角度来审视数学,他们希望数学在逻辑上不要再出问题,但观点各有不同,主要的有 3 种不同的观点,形成逻辑主义、直觉主义和形式主义三大学派。

逻辑主义的代表人物是罗素和怀特黑德(A. Whitehead,1861—1947)。1903 年,罗素出版的《数学的原理》和 1910 年—1913 年二人合著的 3 卷集《数学原理》是逻辑主义的集大成。怀特黑德是英国数学家、哲学家和数理逻辑学家。罗素直言:"数学就是逻辑。"怀特黑德说:"纯数学这门科学在其现代发展阶段,可以说是人类精神之最具独创性的创造。"怀特黑德强调对数学要从哲学与逻辑上进行研究,他批评许多数学家"只知道他们所研究的东西的细节,但对于表述数学科学的哲学特征却毫无所知"。逻辑主义学派主张全部数学由逻辑推导出来,数学概念可以依逻辑概念来定义,数学定理可以由逻辑公理按逻辑规则证明出来,即从一些不定义的逻辑概念和逻辑公理出发,通过数学符号(逻辑符号)的形式演算来构建整个的数学逻辑体系。虽然罗素与怀特黑德的这种逻辑主义的理想一直不能实现,但他们对现代数理逻辑的发展做出了巨大贡献。事实上,罗素与怀特黑德等把数学等同于逻辑是偏激的,与数学之丰富、之灵活和与实际联系之密切不完全相符。

直觉主义学派的代表人物是荷兰著名数学家布劳威尔和庞加莱,德国数学家克罗内克则是直觉主义学派的先驱者。

布劳威尔(L. E. S. Brouwer,1881—1966)是有名的拓扑学家,脍炙人口的 Brouwer 不动点定理是数学史上的佳作,它指出:若 f 是从一个闭三角形区域 Δ^2 到自身的连续映射,则 f 有不动点 $x_0 \in \Delta^2$,即 $f(x_0) = x_0$。(此定理的一个巧妙证明见王树禾著《图论及其算法》。)

布劳威尔生于荷兰的鹿特丹，1897年考入阿姆斯特丹大学攻读数学，1907年获博士学位，学位论文正是直觉主义的代表作《论数学基础》。他倾向庞加莱的直觉主义观点而不赞成罗素与希尔伯特的观点。从1912年起，布劳威尔开始系统地研究数学基础，发表了一系列研究成果，用直觉主义的观点对经典数学作了详尽的批判，寻求构造性数学的基本概念。他的基本思想是构造性的，主张数学独立于逻辑，信奉克罗内克“上帝创造了整数，所有其余的数学都是人造的”的主张。构造性是直觉主义学派的指导思想和数学的行为准则，按他们的主张，证明一个数学对象存在或数学性质成立时，必须证明它可以在有限步骤之内构造出来才算成功。他们不承认反证法的有效性；只承认可构造的无穷集合，而摈弃例如“所有集合的集合”这种无法构造的东西，从而不会产生罗素悖论之类的危机，直觉的构造才能作为数学的基础，他们的数学纲领是：

自明的原始概念→初始直觉→构造数学，决定概念是否正确和可接受性的是直觉，而不是逻辑。形式逻辑仅仅是描述的手段，不是数学的基础，布劳威尔的名言是：

“是逻辑依赖数学，而不是数学依赖逻辑。”

1919年，布劳威尔给出了测度的构造性理论，1923年他提出构造性函数论。

布劳威尔在拓扑学上的贡献是出色的。他的突出贡献是不动点定理：n维球内映射到自身的任意连续映射至少有一个不动点；而且，1913年，他还建立了拓扑空间维数的严格定义。1907年，他研究了希尔伯特第5问题，得到一定进展，由于他的突出的成就，当选为荷兰皇家科学院院士，1919年，当选为德国科学院院士，1943年，当选为美国数学会会员，1948年，当选为英国伦敦皇家学会会员。

直觉主义思想的一个典型的例子是：若令 $x=(-1)^k$，其中 k 是 π 的十进制表示中第一个零的位数，这个零之后连续出现1，2，3，…，9；如果不存在这样的零，则令 $x=0$。大多数数学家认为 x

是已经被定义好了的一个数。但直觉主义者却不轻易接受这个 x 的定义，他们坚持说，能把 π 中第一串“0123…9”找出来才能承认 $x=(-1)^k$，而“$x=0$”的真假则难以确定，因为不能保证用有限步骤确定 π 中数串 0123…9 的不存在性。

直觉主义先驱者克罗内克(L. Kronecker, 1823—1891)是德国著名数学家，犹太人，生于德国利格尼茨。1841 年考入柏林大学，师从狄利克雷、雅可比和施泰纳(Steiner)等一代数学大师，1845 年以《论复单位元》的论文获博士学位。此后在家乡做了 8 年商人、银行家和地主，使他为日后专心数学研究积攒了必要的资金。1861 年，克罗内克当选柏林科学院院士，1868 年任格丁根大学教授，接替高斯与狄利克雷的职位。1868 年当选巴黎科学院院士，1884 年，当选为英国皇家学会会员，被尊称数学界的“无冕之王”。

克罗内克主张从代数到分析，要把所有数学算术化，“一个量的存在性证明只有当它给出一种方法，通过它可以实际地发现要证明存在的量时，才可被认为是完全严格的”。显然，这是顽固的构造主义即直觉主义的思想。

克罗内克一生发表主要论文 150 多篇，尤以代数与数论见长。

直觉主义限制使用排中律是一种极端偏激的主张。事实上，如果否认反证法，数学成就中将会有一大批成果成为牺牲品。但直觉主义者们崇尚构造性数学，在当今计算机科学与现代数学相结合的潮流中，他们的主张大有充分施展的前途。

希尔伯特对直觉主义十分反感，他批评说：“禁止数学家使用排中律，就像禁止天文学家使用望远镜一样。”希尔伯特抛出“希尔伯特纲领”，本质上是一个“形式主义纲领”。

形式主义的代表人物是希尔伯特，虽然希尔伯特本人并不承认自己是形式主义者。形式主义者认为，数学应该是一个形式化的系统，通过逻辑从一个确定的用逻辑符号组成的数学语言表述的公式，通过形式的程序推理，确定该公式蕴含另一个公式，再确定第三个公式，依次形式地递推，形成一个公式的链条，每一个数学证明皆为此种公式链所构成，其中只讲究逻辑结构，而不关心其

实际内容。

从公式到公式的演绎过程不涉及公式任何含义，是形式主义与逻辑主义的区别。

“形式主义纲领”的基本思想是，数学只是研究符号组合的科学，它的对象是虚构的，不具客观性，数学真理只表现在数学理论的无矛盾性、即数学理论的真理性无客观性可言。这些观点显然是不能被大多数数学家接受的。事实上，无矛盾性仅仅是数学真理的必要条件，不论数学如何形式化，它的结论不允许与现实世界的客观存在相抵触，应该是现实世界的抽象而深刻的表现。

形式主义者中不少数学家例如鲁宾孙、科恩等人，对数学和数理逻辑做出了不朽的贡献。

哥德尔的不完全性定理使形式主义纲领受到了致命的打击。1931年，哥德尔在论文《论〈数学原理〉及有关系统中形式不可判定命题》中证明了如下定理：

任一足以包含自然数算术的形式系统中，如果是相容的，则它一定存在一个不可判定命题，即存在某个命题 A，使 A 与 $\neg A$ 在该系统中皆不可证。

系统中有不可判定的命题时，称该系统是不完全的。哥德尔指出形式化系统可以存在不可判定的命题！

哥德尔深刻指出“真”与“可以证明”是两回事，真的命题未必可以证明。

3　纯粹数学与应用数学都是好数学

数学是研究大小、形状和关系的科学，它有不止一种分类的方法，例如可以分成初等数学与高等数学，经典数学与现代数学，离散数学与连续数学，还可以分成纯粹数学与应用数学两类。什么叫做纯粹数学？什么叫做应用数学？我们没有一个严格的定义，不严格地讲，暂时不能实际应用的数学即纯粹数学，另外的数学则

为应用数学。但是纯粹数学可以是实际有用的,例如数论对于密码的编制与破译,泛函分析对于物理学的应用等;而应用数学可以是优美多姿的,有时应用数学会表现得十分"华而不实"。事实上,应用数学不同于工程学,应用数学并不去直接设计导弹和原子弹,应用数学和纯数学一样,也是一种数学思维准则与方法,而不是工程技术的一部分,应用数学的最终目标是付诸行动,但它是在讨论使飞机起飞、使原子弹爆炸中隐藏的数学原理。纯数学与应用数学不易截然分开,一个人有时自己也说不清他是纯数学家还是应用数学家,例如庞加莱,他创始的常微分方程定性理论既有纯数学的味道也具鲜明的动力学应用的味道,这位数学家不能称为纯粹数学家,也不能称其为应用数学家。但有的数学家则不是这样,例如英国大数学家哈代(G.H. Hardy,1877—1947),他性格鲜明地标榜自己是纯粹数学家。哈代生于英国克兰利,1896年考人剑桥大学三一学院,1908年出版名著《纯粹数学教程》,1910年当选英国皇家学会会员。

1904年哈代与J.E.李特尔伍德(Littlewood)结识,他们联名发表了约100篇有份量的数学论文。1913年哈代结识了印度传奇式数学家S.A.拉马努金(Ramanujan),帮助拉马努金进行近代数学研究。

哈代对数学执迷和热爱是有志搞数学的人的榜样,他说:"数学可以增进和维持人的心灵的高尚","当这个世界都疯狂了的时候,数学家可能发现数学是一种无与伦比的镇定剂。因为数学在一切艺术与科学当中是最为阳春白雪的。""除了想当数学家之外,我不记得还想过当别的什么人。"他说"数学是一种年轻人的游戏。人的第一责任,至少对于年轻人来说,是有雄心,雄心是一种合理的化作多种形式的高尚情感。几乎所有造福人类的实质性贡献都是由满怀雄心的人做出的。"他强调职业上的自豪感和智力上的好奇心,他说:"数学是所有科学中最令人好奇的,它蕴藏着最复杂的也是最迷人的方法,提供了无与伦比的展示绝对的专业技巧的机会。"哈代终身不娶,把全部热情都投在纯数学研究上,他一生有8

部专著和350篇论文发表，是20世纪杰出的分析学家，在解析数论、调和分析、函数论等方面，都做出了重要成果。但他在关于纯粹数学与应用数学的看法上，似有偏激之处。例如哈代说："纯粹数学总体而言显然比应用数学有用。""数学很少有实用价值，有用的很小一部分却比较乏味。数学定理的严肃性不在于它的实用效果，实用效果往往无关紧要。""大部分初等数学很有实际用处，初等数学包括微积分的相当有用的知识。总的来说，这部分数学是颇为死板的，它们只是数学当中最无美学价值的那部分。""真正的数学家的真正的数学，几乎完全是无用的，真正职业数学家的一生是不可能靠其工作的实用性来评价的。"哈代直言："我们面前有两种数学，一种是真正数学家的真正的数学，一种是我所谓的不足称道的数学。不足称道的数学总的来说是有用的，而真正的数学总的来说是没有用的。"哈代所称的真正的数学即纯数学。他公开说："有些应用数学分支，其丑陋令人生厌，其乏味无法忍受。另一方面，不足称道的数学都在战争中有许多应用，枪炮专家和飞机设计师是不可一日无此君的。"

哈代为人谦和，爱好和平，上述关于应用数学的贬斥性言论与他的反战情结有关。哈代对青年数学家全力扶植，例如对印度数学家拉马努金和中国数学家华罗庚的热情相助和学业上的辅导，在数学史上传为佳话。

数学史显示，纯粹数学可以是实际有用的，而应用数学可以是优美多姿的。美国数学家P.R.哈尔莫斯(P.R.Halmos,1916—)说："在某种意义上，所有的数学都是应用数学，而在某种程度上，不易区分纯数学与应用数学。"他指出："应用数学的动机是认识世界并且也许还要改造世界，满意则来自问题的解答经过了实际的检验而且可以用来进行预测。纯数学的动机往往只是好奇心，满意则来自解答了原来似乎相距甚远的概念之间的意想不到的联系。对纯粹数学家而言，他的学科是艺术乐趣永不枯竭的源泉，不仅是难题的刺激，胜利的满足，而最主要的是沉思的愉悦。纯数学家把他们的专业看作一种艺术，在他们的语言中，对别人的工作最

高的赞扬是"漂亮"。应用数学家把他们的学科看成一种系统化,用来赞扬一项工作合适的说法是"巧妙"和"强有力"。对许多纯粹数学家来说,应用数学只不过是一口袋技巧而已,而对许多应用数学家来说,许多纯数学只是为了自我欣赏而进行的无意义的抽象,无丝毫价值"。

我们认为,在一些纯数学家与应用数学家之间的这种门户相见,互不尊重的现象是不可取的,关于纯粹数学与应用数学的关系应该认为是共生的,没有对方谁也不能生存。哈尔莫斯形象地指出:"应用数学没有纯粹数学不能生存,正如食蚁兽离开蚂蚁不能生存一样。而且,为了不至于成为因循守旧,枯燥无味,毫无意义和死气沉沉,纯粹数学需要增添活力,需要与现实接触,而这种现实只有应用数学才能提供。对纯粹数学来说,应用是这个学科的一个主要源泉,而且仍然是灵感的经常的来源;对应用数学来说,纯粹数学的概念和方法是工具。"

应用数学的骨干分支是微分方程。事实上,我们必须研究世界的变化与运动,涉及到变化的速度等。其数学模型往往是微分方程,例如行星运动,热传导,反应与扩散,波动与稳定、大气的变化等,都可以写成微分方程进行研究。而微分方程必须以拓扑学、代数、几何、分析与泛函为基本数学工具来研究。反过来,微分方程的研究又促进了众多纯数学分支的发展,例如微分动力系统就是从庞加莱的微分方程定理理论中孕育成长出来的一门现代数学分支,它似乎更像纯数学。

近年来,由于计算机科学的崛起,离散数学当中的代数结构、数理逻辑、数论、图论和组合论等一些十分抽象的原来视为纯数学的分支,在现代科学中的应用日趋频繁和重要,哈尔莫斯说:"在可以预见的将来,离散数学将是在认识世界的过程中日益有用的工具,而分析将因此相形之下占次要地位。"

普林斯顿高等研究院的 A. 波莱尔在谈及纯数学与应用数学时说:"数学仿佛是冰山,在下面的是纯数学领域,隐藏于公众视野之外,水面之上为尖点,那是我们称之为应用数学的可见部分。许

多人只看见这个尖点，但他却没有意识到，如果没有水底下大得多的部分，它是无法存在的。”

现代科学中许多有趣的新型问题向数学家进行挑战，这些问题导致数学的发展。例如洛伦兹的天气动力学研究对数学家提出混沌问题的挑战；艾滋病的恐怖性流行对数学家提出建立 HIV 传播的数学模型的挑战；自由市场与全球经济一体化对数学家提出建立可信的数理经济学与对策论新模型的挑战等。数学的用场正在扩大，数学的用处难以预计，即使是现在那些纯粹数学的最抽象的研究成果，有朝一日也很可能会回到实际中去应用。

1994 年、1996 年和 1997 年的诺贝尔经济学奖得主中，John Nash，Selton，James A. Mirrlees，William Vickrey，Robert Merton 等都是数学家出身，用他们掌握的博弈论等数学工具研究经济学而大获成功。

哈佛大学教授 Kenneth Arrow 也因用应用数学搞经济学中的平衡理论而获 1972 年诺贝尔经济学奖。当哈佛的教务长把这一得奖的喜讯告诉数学系一位同事时，这位同事说 Arrow 用的数学是哈佛大学一年级的深度。可见价值的大小不在于其内容的深浅，重要的或者说可贵的是把数学与实用领域有机结合起来造成的总效益比两方之和的力量大得多。

数学史上还有一个应用数学的精彩实例是 W. Libby 在 1960 年荣获诺贝尔奖，他的获奖项目对地质学与考古学的发展有十分可贵的贡献。W. Libby 根据古人洞穴中的草鞋（遗物）计算出人类是在 11500 年前冰河期末期从东半球来到阿拉斯加的，进而判断，那时白令海峡的水面比现在的要窄许多，所以古人能由亚伯利亚步行通过海峡迁徙到这个新大陆去。W. Libby 用微分方程来推测古物的年代。他根据高层大气中存在放射性碳，氧化成二氧化碳后被植物吸收，所以植物以及吃这些植物的动物体内有了放射性碳，他求得碳的半衰期为 5600 年，若洞穴中发现的那只草鞋的放射性只是活着的同类草的放射性之半，则草鞋是 5600 年前编成的。若放射性只有四分之一，则草鞋为 $5600 \times 2 = 11200$ 年前编成

的。为求得半衰期，设 x_0 是碳的初始克数，t 年后减至 $x(t)$ 克，则得柯西问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -kx \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

其解为 $x(t) = x_0 e^{-kt}$；设 T 是半衰期，则

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-kT}, kT = \ln 2, T = \frac{1}{k}\ln 2$$

经观测得 $x(10)$ 的值，而

$$x(10) = x_0 e^{-10k}$$

$$k = \frac{1}{10}\ln \frac{x_0}{x(10)}$$

于是半衰期为

$$T = \frac{10\ln 2}{\ln \frac{x_0}{x(10)}}$$

1967 年，卡内基—梅隆大学的科学家用上述 W. Libby 的工作原理鉴定出 Rembradt 协会用 17 万美元买下的 17 世纪荷兰名画家 Jan Vermeer 的名画《Emmaus 的信徒们》是赝品！后经破案知伪造者是法国三流画家 Van Meegeren。用同样的方法又查出 Jan Vermeer 的名画《洗足》、《读乐谱的妇人》和《弹曼陀林的妇人》也被人伪造。

数学致力于通过应用于物理、生物和社会科学的手段而达到征服自然和改造社会的伟大实践。纯粹数学与应用数学之间的严格界线已很难划清。事实上，不管是纯数学还是应用数学，都有极重要的应用，也都是人类文化的重要成分。

4　数学家是些什么人

数学家是指以纯数学或应用数学的研究和教学为职业且公开发表过至少一篇有创见的数学论文的人。

数学家成长的决定性因素是社会条件,遗传并不起决定的影响。历史上,除伯努利家族之外,很少发现数学家的父辈亦是数学家的例证。

社会环境的作用可以从"欠发达"国家在数学史上名不见经传,没有记载几个像样的数学家看出来。一个国家的初等与中等教育(基础教育)水平是影响该国数学家成长的重要因素。如果一个国家的基础教育不够现代化,或受到宗教或政治的限制,即使当地的国民足够富裕,也不会培养出有作为的数学家。例如中东一些盛产石油的国家,人民不可谓不富,但他们的现代数学水平和数学家数量都明显不足。

在一个各阶层都有权接受教育的社会中,数学家的出身是各不相同的,他们有的来自名门望族,例如黎卡提和达朗贝尔等;有的来自富有家庭,例如笛卡儿、费马、帕斯卡、克罗内克、若当、庞加莱和冯·诺依曼等;也有不少来自贫寒之家,例如高斯、埃利·嘉当、勒贝格、华罗庚等。从历史上看,大多数数学家来自中等富裕家庭,有一个安定温饱的生活条件,又不是官宦或富商之家。

数学史显示,数学才能大多数在15岁前后发现.重大的数学成果大多是30多岁的数学家搞出的。当然也有20岁前后就做出重要成果的数学家,例如帕斯卡、克莱罗、拉格朗日、高斯、伽罗瓦、闵科夫斯基、阿贝尔等。哈代说:"数学是年青人的玩艺。"但也有不少伟大的数学家,例如庞加莱、希尔伯特和H.外尔,50多岁还保持多产状态,克罗内克、嘉当、西格尔、A.韦伊、I.盖尔范德,60岁之后还继续证出优美的定理。但大多数数学家在55岁或60岁之后,由于创造力和想象力枯竭而不得不退下来。

数学家的性格中有永不收敛的好奇心和不近世俗的独立思考的习惯,他们能耐得住寂寞,对研究的问题,只要得不出答案就持续思考。事实上,数学成果的得出,总是在一段紧张而持久的集中精力思索之后才能达到,有时甚至要几年十几年如一日地干下去。例如陈景润研究哥德巴赫猜想,即使在文化大革命那种浩劫科学文化的年代,仍坚持不懈,终于证明了至今仍是世界领先的命题

(1,2);英国的维尔斯,从1986年到1995年,用近10年的时间,终于攻克了世界级难题,证明费马大定理成立,即 $x^n+y^n=z^n$ 当 $n\geqslant 3$ 时无正整数解。

数学家需要充足的自己支配的时间,以便埋头研究自己的题目。为此,他们大多喜欢在大学里做教授,因为在那里授课占用的时间比其他单位少,而假期等自己支配的时间足够多,至于工资收入的多寡,这些事业心极强的数学家并不放在心上,他们宁愿到工资低的大学任教也不在工业界供职。历史上,像库默尔、外尔斯特拉斯等大数学家,由于一时找不到大学里的教职,宁可到中学教书也不去政界或工商界干事。

数学家一般不出任行政管理或政府要职,因为做数学必须全神贯注,哈代曾经嘲讽他的同时代的一些数学家说:"离开数学的数学家的最近记录都不是特别令人鼓舞的。"

数学家的宗教信仰和政治立场多种多样,例如柯西是一位虔诚的天主教徒;而哈代则是一位可敬的无神论者,他视上帝是自己的仇敌;伽罗瓦是一位热情的革命家;德国数学家O.泰希米勒,尽管他具有与伽罗瓦相媲美的天才,但他是一个罪恶的纳粹分子,疯狂迫害他的犹太师长,最后参加党卫军在战场上为希特勒殉葬,成了法西斯主义的可耻炮灰。

在大数学家当中,犹太人不少,例如冯·诺依曼、柯朗(R. Courant)、爱米·诺特(Emmy Noether,德国女数学家,号称"抽象代数之母")、康托尔、西尔维斯特(J. J. Sylvester,代数学家)、克罗内克等。少数民族未必不善长数学。

在数学史上,巴黎、柏林、伦敦、纽约等出现大批知名数学家不足为奇,但一些小城镇乃至乡村也会涌现出不少大数学家,例如哥尼斯堡城,著名的"哥尼斯堡七桥问题"的故乡,那里出生的数学家著名的有希尔伯特、哥德巴赫、利普希兹、C.G.诺依曼、克莱布什、亨泽尔、雷格蒙塔努斯等,那里的百姓有爱好数学的习俗,真可谓人杰地灵。

历史上那些王公贵族或亿万富翁的子弟,尽管有雄厚的经济

条件和优越的社会地位，但往往蠢得不可救药，很少在数学上有所作为者，反之，一些寒门子弟，倒是可以成长为对数学科学有大贡献的人才，其中最典型的当数印度著名数学家拉马努金（Ramanujan Srinivasa Aaiyangar，1887—1920），他生于印度马德拉斯省坦焦尔地区贡伯戈纳姆附近埃罗得的一个极端贫穷的家庭，他是长子，下有二弟，全家7口人全靠其父每月在一家布店打工收入的20卢比为生，生活上饥寒交迫。拉马努金5岁上学，7岁便跳级升入贡伯戈纳姆中学，10岁在全坦焦尔地区初中毕业考试中名列第一名。他小时候就爱动脑筋提一些怪问题，例如一次老师讲课说“零被任何数除其商皆为零”，拉马努金立即起立提问：“零被零除也是零吗？”12岁时，独立地推导出公式

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

1903年考入贡伯戈纳姆公立学院，他从图书馆借到卡尔（Carr）的英文版《纯粹数学概要》，书中列出6165个定理，但未给出证明，1903年—1907年，他研读了这本书，而且给出书中公式的全部证明，且加以推广，遗憾的是因为他文科成绩太差而中途退学，未能毕业。直到1911年，他没有找到固定职业，虽然衣食无着，但他对数学的兴趣不减，从退学到1911年，他研究了幻方、连分数、超几何级数、素数、椭圆积分等，研究成果记录了3个大笔记本，但受当时印度数学家往往只写结论不写证明的传统影响，他的研究结果也都未写出证明。

1909年，拉马努金与9岁的女孩安马（Janki Amma）结婚，成家之后，必须出外为家庭谋生，他到一个小镇找到了镇长R.艾亚尔（Aiyar），艾亚尔也是一位数学爱好者，看了拉马努金丰富精彩的研究成果很喜欢这位乞丐才子，帮他找了一份代理公务员的工作。印度数学学会的创建人之一拉奥（Rao）听说拉马努金的数学成果，并且翻看了已经揉破了的拉马努金的笔记本，拉奥十分怜惜这位年轻人的才能，拉奥按时对拉马努金资助一些生活费，让拉马努金回到马德拉斯去安心从事研究。

一天，一位老朋友碰到拉马努金，这位朋友对拉马努金说：“现

在人们都称赞你是数学天才！”拉马努金笑道：“天才？请您看看我的肘吧！”只见他的肘部皮肤又厚又黑，原来是他没钱买纸来演算，只好在石板上用石灰块来计算，算完后用肘部一擦，再算下面的内容。1912年，拉马努金在马德拉斯港务局找了一份月薪25卢比的工作，因为他不愿长期接受别人的资助，他从码头上拾来一些包装用过的纸片做草稿纸，写出了他的第一篇论文《伯努利数的一些性质》在《印度数学会杂志》上发表，接着又发表了一批关于级数、无穷乘积和π的几何近似方面的论文。

1913年拉马努金给著名数学家哈代写信，附上了他研究出的120个定理与公式。哈代发现了拉马努金是一个难得的人才。哈代回忆说：“我依然满意地记得我能够立刻确认我发现了一块怎样的瑰宝。甚至现在，我也想象不出有人敢说他是一个能有多伟大的数学家。”哈代及时回信邀请拉马努金来剑桥大学一起作研究。1914年，拉马努金从印度来到剑桥三一学院，得到了剑桥大学的奖学奖。在欧洲的5年，使他成了一位现代数学家。他在英国、法国和德国的杂志上发表了21篇重要论文，在《印度数学会杂志》上还发表了多篇论文。1918年当选英国皇家学会会员和三一学院研究员，这些荣誉是一个数学家所渴望的最高荣誉，拉马努金在31岁时就都得到了。

在英国，他的生活与工作仍然异常艰苦，他是一个素食的婆罗门教徒，每天自己煮饭，营养不良，加上对数学废寝忘食地热情钻研，1917年，终于患了肺结核。1919年回到印度，马德拉斯大学决定聘任他为教授，任期5年，每年250英镑的科研津贴。可惜这时他身体已极度病弱，1920年病逝于马德拉斯，亡年仅33岁！他一生清贫如洗，死后仅留有两张照片和一个热敷用的热水袋，他遗嘱说：“把学校给的奖金与津贴给穷孩子和孤儿做学费。”

拉马努金一生有4册笔记本，是4部记录他的部分数学成果的数学文物。其中第四本是他在病榻上写成的。他死后50年失掉下落，被数学界称为“遗失的笔记本”。1976年在三一学院图书馆发现，之中记有600余条公式。1987年，印度总理把它公布于

世。他的前3本笔记本与第四本现已全部收入由剑桥大学出版社出版的《拉马努金全集》中，马德拉斯大学建立了“拉马努金数学研究所”，以继承这位受全世界敬仰的传奇式数学家的遗志和事业。

在评论这位生活在极度贫穷落后的社会环境中，无法得到系统严格的数学教育和图书文献的奇才拉马努金的工作时，哈代说：“如果它们（指拉马努金的工作成果）不那么古怪的话，会更伟大；其中所展示的深刻的无与伦比的创造力无人能否认。如果他青少年时代就被发现并进行培养，他会成为更加伟大的数学家。”他在堆垒数论、椭圆函数等方面的贡献是数学史上的重要文献，他的“穷且益坚”的治学精神则是每个想在科学上干出成绩的学子的榜样。

拉马努金的一生是对落后的社会制度与教育制度抗争的一生。哈代评论道：“当贡伯戈纳姆大学拒绝了他们曾拥有的一位伟大的人物时，损失是不可弥补的。这是我所知道的无能的、僵化的教育体制造成损害的最糟糕的例子。难以想象的不利条件一直伴随着他，一个贫穷孤寂的印度人用他的智能与欧洲人积累起来的智慧竞争，他根本没受过真正的教育，在印度，没有一个人能使拉马努金可以从他那里学到数学。”

在回忆拉马努金的天才时，哈代讲了下面的故事：“他能够通过一种几乎难以置信的方式获得数字的特性，利特尔伍德曾说每一个正整数都是拉马努金的一个朋友。我记得他病倒在帕特尼(Putney)时，有一次我去看望他，我乘坐的出租车号码是1729，我说这个数字在我看来相当单调，但愿它不是一个不幸的兆头。拉马努金回答：‘不，它是一个非常有意思的数，它是最小的能用两种不同的方式表示成两个立方之和的数。’自然地，我问他是否能告诉我相应的四次幂问题的解，想了一会儿之后，他回答他不知道明显的例子，但猜测第一个这样的数一定非常之大。”

事实上，$1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3$。后来欧拉发现

$$635318657 = 158^4 + 59^4 = 134^4 + 133^4$$

是已知的关于四次幂之和的最小的例子。

哈代对拉马努金评价很高，他说："在过去50年中，有许多比拉马努金更重要，我想有人一定会说是更伟大的数学家，然而没有一个人有勇气在自己熟悉的领域中与他对抗，如果他懂得比赛规则，他可以先让给世界上任何数学家15分。"

在古今数学史上，曾出现过不少有才华的女数学家，其中有4位是最具代表性的。一位是希腊的许波提娅(Hypatia，370—415)，她是世界上第一位女数学家，她的事迹我们已经讲过，这位聪慧美丽的女才子，世界著名的数学家惨死在罗马帝国宗教狂的野蛮劫持与暴力之下，尸体被付之一炬，成为数学史上的千古绝唱，她的道德文章永垂不朽。另一位是号称"数学皇后"的柯瓦列夫斯卡雅(Kovalevskaya，1850—1891)，她在微分方程方面有里程碑式的贡献，是历史上第一位女院士，当年她以"假婚礼"冲破对女性的歧视，毅然远走西欧求学的感人事迹，是每个有志科学的青年永远要继承的精神遗产。

还有两位，一位是近代数学物理的奠基人之一，法国的女数学家索菲娅·吉尔曼(Sophie Germain，1776—1831)；一位是德国的女数学家爱米·诺特(Emmy Noether，1882—1935)，她是抽象代数的缔造者之一。

索菲娅·吉尔曼生于巴黎一个富有家庭，当时法国社会动荡不安，父母对她采取保护措施，把她关在家里过着与世隔绝的生活，她在父亲的藏书中找到一本数学史，于是走进了数学的大门。索菲娅利用隐居的这段时间自学了代数、几何和微积分，这时她不满18岁。1794年，巴黎综合科技大学创立，索菲娅自信地去报考，可恨学校当局拒绝女生报名，她并不灰心，千方百计买到该学校的所有教材，她精读了拉格朗日的讲义之后，以化名"勒布朗"给这位领袖级数学大师拉格朗日邮去她写的一篇论文，拉格朗日看后十分欣赏，决定前去拜访这位署名勒布朗的男学生，出面相迎的勒布朗竟是一位19岁的姑娘。在拉格朗日的指导与鼓励之下，索菲娅迅速提高数学水平。1801年，高斯的名著《算术探究》出版，索菲娅专心研读，书中有正多边形作图可能性问题，高斯证明了边数为

$2^{2^n}+1$ 型素数的正多边形可用规尺画出，例如 $17=2^{2^{2n}}+1$，高斯给出正十七边形的做法。高斯的深奥论证素菲娅心领神会，在这方面她研究出自己的一些新成果，这次她又以勒布朗的署名写信给素昧平生的高斯通报自己的结果，高斯见信十分之欣喜，从此两人一直书信往来，研讨数论问题。1807 年普法战争中法军占领高斯住地汉诺威，索菲娅担心高斯的安危，攻城的将领恰巧是索菲娅父亲的朋友培奈提，索菲娅及时前往法军军营拜见这位将军培奈提，要求他注意高斯的安全，培奈提下令进城军人不许损伤高斯。后来高斯得知暗中设法保护他的正是与自己通信多时的勒布朗先生，最后高斯终于发现勒布朗原来是名曰索菲娅的一位女数学家。

索菲娅在高斯的指导下证明，当 x,y,z 互素时，不定方程

$$x^n+y^n=z^n$$

在 $n<100$ 时无正整数解，这是当时对费马大定理的一个重大突破。

德国物理学家克拉尼提出“关于弹性曲面振动”问题，一维（曲线）振动比较易于求解，二维（曲面）振动问题则难以求解，当时很多知名数学家一时也拿不出解法，拿破仑下令法国科学院以金质奖章悬赏征解。1811 年—1816 年，索菲娅经过艰苦细微的研究，终于把《关于弹性板振动的研究报告》送交法国科学院，正确无误地解决了这一著名的数学物理难题。这项成果震惊了当时的科学界，索菲娅成为近代数学物理这门学科的奠基人之一，著名数学家赞扬索菲娅的论文说：“这是一项只有一个女子才能完成而少数几个男子能看懂的巨大成就。”

但是，当时对女性的社会偏见束缚着这位杰出的女数学家，虽经许多科学家鼎力推荐，学术界的大门仍然对索菲娅紧紧关闭，使得她在数学界找不到任何一个职位，最后高斯为她在哥廷根大学申报荣誉博士学位获得批准。当高斯把这一消息写信告诉从未谋面的“勒布朗”时，她已患癌症去世了！亡年仅仅 55 岁。

德国著名女数学家爱米·诺特生于厄尔兰根一个犹太家庭，其父是厄尔兰根大学教授，代数几何学家。1900 年，她受到数学

魅力的吸引，希望到大学听数学课，但当时德国大学不给女生学籍，她只好旁听。1903年，她转到哥廷根大学旁听希尔伯特、克莱因、闵可夫斯基等大师级数学家的课。后来德国教育制度改变，1907年，爱米通过博士论文答辩，取得博士学位。博士论文题目是《三元双二次型的不变量完备系》，文章写得简洁漂亮，通篇全为符号演算，未用自然语言，列出了三元四次型协变量的完全组清单公式331个。但是，由于当时对妇女的歧视，一直到第一次世界大战结束，德国成立了共和国，她才得到了一个讲师的职务，这时她开始考虑把数、函数、运算之间的关系，与特殊的对象分离开来，表述成普遍适用的概念，使之更加明朗和有更广泛的应用。1920年，她研究微分算子环，首次提出右理想与左理想的概念。1921年，她发表抽象代数的经典理论《整环的理想理论》，奠定了抽象环论的基础，标志着抽象代数的正式诞生。数学家卡普兰斯基称爱米·诺特为“抽象代数之母”。但她的处境并不顺利，直到1920年她才获得讲课资格，但得不到工资，只能靠听课学生交的听课费维持生活。在极端艰苦的生活条件之下，她仍坚持代数学研究，爱米一辈子没有结婚，她性格开朗，正直无私。

在哥廷根，她主持代数讨论班，培养了大批数学家。例如1924年，22岁的范·德·瓦尔登专程来哥廷根向爱米·诺特求教。在讨论班学习和工作的苏联数学家有25岁的乌利逊和27岁的亚力山大洛夫等人，后来这些人都成了数学界的名人，讨论班的学子们被称为“诺特的孩子们”。中国的数学家曾炯之也是“诺特的孩子们”中的一员。

1928年，应亚历山大洛夫之邀，爱米·诺特去莫斯科工作，在莫斯科大学主攻抽象代数并主持代数几何讨论班，直接推动了苏联抽象代数与拓扑学的发展。她的《代数学》一书是抽象代数权威性著作。20世纪20年代，在哥廷根学习的日本数学家正田建次朗把爱米的代数思想带回日本，末纲恕一、秋月康夫、浅野启三、中山正、车屋五郎、永田雅宜等数学家继承了诺特的传统，推动了日

本抽象代数的发展,一时间,爱米·诺特成了享有最高国际声誉的女数学家。

1933年,希特勒上台,施行"国家社会主义"的法西斯政策,疯狂排犹,爱米·诺特被剥夺了讲课的权利,51岁时被迫流亡美国,在普林斯顿高等研究院任职,结交了外尔和冯·诺依曼等一大批大师级数学家。1935年,亡于癌症,年仅53岁。在美国布兰·毛恩学院举行的追悼会上,外尔深情地宣读了爱因斯坦为爱米·诺特写的悼词:

她曾是充满生命活力的典型,
面对生活的考验,
她坚毅不屈、勇气十足,
她曾迈上数学创造力的顶峰,
她那深邃的想象力和永不疲倦的
实践所积累的技巧,达到了完美的境界,
对新的课题,
她如饥似渴。

数学史告诉我们,女数学家事业的历程是艰难的。由于女性的细心和坚韧,可能比一般男性的数学家成就还要大些。女性和男性一样适合搞数学,可以期望有更多的女数学家出现。

在数学史上,不少大数学家并非大学数学专业的科班出身。例如牛顿是物理学家;莱布尼兹在莱比锡大学学的是法律,且获得阿尔特道夫大学法学博士学位,投身外交界;雅各布·伯努利获得的是哲学与神学学位;约翰·伯努利青年时经商,后学医,获医学博士学位;丹尼尔·伯努利开始在大学里学的也是医学,曾担任解剖学、植物学和物理学教授;卡尔丹在帕维亚大学攻读医学,获医学博士学位,行医谋生;柯西毕业于巴黎理工大学道路与桥梁专业,做过建筑工程师;外尔斯特拉斯在大学学的是财务管理;费马在大学学的是法律,毕业后当律师,做议会议员,是社会活动家,史称业余数学家之王;韦达普瓦捷大学法律系毕业,毕业后做律师和巴黎法院审查官,皇室私人律师;黎曼在哥廷根大学学习

神学,后转修数学;笛卡儿在普瓦蒂埃大学获得法学博士学位,在巴黎当律师;创造对数的普耐尔在从事数学研究之前,从事农业、牧业及土地测量工作;牛顿的老师巴罗剑桥三一学院毕业后任英国圣公会牧师,剑桥大学希腊语教授;画法几何的缔造者蒙日是法国梅济埃尔皇家工程学校旁听生出身,学习土木建筑;傅里叶没有大学毕业文凭,在拿破仑军中供职,做过地方官,被拿破仑封为男爵,射影几何的奠基人彭赛列大学毕业后担任拿破仑远征军的工兵中尉,战败后被关入俄国监狱;波尔查诺在布拉格大学哲学院和神学院毕业,后任该校宗教哲学教授;陆家羲毕业于东北师范大学物理系,在包头中学做物理教员一直到去世;刘维尔毕业于法国道路与桥梁工程学院;凯莱学过法律,当过律师;冯·诺依曼在柏林大学和苏黎世工业大学学习化学专业,毕业后任化学工程师。像上述这些大数学家一样,在大学里学的并非数学专业的数学家还有很多,分析他们之所以能最终成为知名数学家,可能是由于他们天分极高,学习任何专业也会出类拔萃,但尤其善长抽象思维,对数学概念与数学模型的抽象与建立有得天独厚的敏感性和创造性。学习非数学专业并非与事无补,数学之外的功夫对搞数学具有特殊的启发与借鉴作用,正所谓他山之石,可以攻玉。数学功夫可以来自数学之外,例如哲学的思辩、医学的严格细致、工程技术的灵巧等,恰为数学家必要的科学素质。可以预期,今日非数学专业的大学生之中,也将会成长出很有作为的数学家。

大数家家当中,不乏自学成才者。例如布尔、华罗庚、索菲娅·吉尔曼、韦达、巴拿赫、贝塞尔、格林、柯瓦列夫斯卡雅、拉马努金等。自学有自学的好处,可以充分发展独立思考的能力,独立思考是创造性工作的根本条件。当然,数学史上自学而有大成就的数学家之所以走自学之路,大都迫于社会原因,尚不知有多少极具数学禀赋的天才少年,由于所处的社会与家庭条件差而被埋没,连自学的条件都没有!

数学家面对的题目是人类智慧所能达到的极限甚至是他那个

时代的数学所不能解决的难题，加之对自己所从事的事业和所冲击的题目的喜爱和执着，其专心致志的状态比废寝忘食卧薪尝胆者有过之而无不及，终生未婚的大数学家也大有人在。例如许波提娅(女)、笛卡儿、牛顿、阿贝尔、莱布尼兹、外尔斯特拉斯、伽罗瓦、切比雪夫、哈代、爱米·诺特(女)等，他们把毕生的精力全部献给了人类的数学事业，可歌可敬!

5 悖论与数学

我们已经看到，伯克莱悖论与罗素悖论给数学添了不小的麻烦，但也促进了微积分的严格化和公理集合论的发展。何谓悖论?一种理论系统中出现的逻辑矛盾就是悖论。它与谬论不同，谬论可以从已有的理论中指出它错在哪里，而悖论尽管是自相矛盾的，但从它所在的理论体系中却不能阐明其错误的原因。悖论的历史很长，大约在公元前6世纪古希腊就提出克里特人悖论。1947年，用世界上第一台计算机来判断“说谎者悖论”，即判断

语句:“这个语句是错的。”

是否为真?结果计算机交错地打出 yes，no，yes，no，…。与此相似地，还有柏拉图—苏格拉底悖论:

柏拉图说:“下面苏格拉底说的话是假的。”

苏格拉底说:“刚才柏拉图说了真话。”

与罗素悖论有关的一个悖论是所谓“理发师悖论”:村中每个男人都要剃须，仅有一位男理发师，此理发师约定:“我给且只给本村不自己刮胡子的男人剃须。”有人问:“理发师先生，你自己呢?”

数学史上出现的数学悖论很多，我们选抄几则如下。

1)最大势悖论

1895年，康托尔证明了如下定理:

集合 A 的势小于 A 的幂集(以 A 的子集为元素的集) M 的势。

从此定理推出没有最大基数。

但是"取一切集合为元素组成一集合 M_0，则 M_0 的势应是最大的。

这个悖论只有禁谈"一切集合为元素组成的集合"才能排除。

2)理查德悖论

1905 年，理查德提出：把自然数的各种性质记成 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ "与性质 a_i 不相符的脚标 i 称为理查德数。"例如，若 a_7 代表素数性，而 7 恰为素数，则 7 是"非理查德数"，若 a_8 代表奇数性，8 与 a_8 代表的性质不符，于是 8 是理查德数。

理查德数也是自然数的一种性质，如果此性质记成 a_k，k 是理查德数吗？此构成一个悖论！

3)阿洛(Arrow)选举悖论

设 $S = \{a, b, c, \cdots\}$ 是候选人集合，$J = \{1, 2, 3, \cdots\}$ 是选民集合，设 $j \in J$ 的投票排序为 $p(j)$(J 与 S 皆有限集合)。设 $S = \{a, b, c\}$，$J = \{1, 2, 3\}$，投票结果如下：

$$p(1) = abc, p(2) = bca, p(3) = cab$$

于是根据投票结果，a 对 b 说："1 号与 3 号选民指出我优于您，所以我比您优先。"少数服从多数，即 a 优于 b。b 对 c 说："1 号与 2 号选民指出我优于您，所以我比您优先。"c 对 a 说："2 号选民与 3 号选民指出我优于您，所以我比您优先。"于是造成 a 优先于 b，b 优先于 c，c 优先于 a 的矛盾。

为了使投票排序公平合理，1951 年，Arrow 提出如下 4 条评优公理：

公理 1 $\forall x, y \in S$，存在一种投票方式，使得 x 优于 y。

公理 2 若进行两次投票，第一次已判 x 优于 y，第二次投票结果，在所有的 $p(j)$ 中，x 的序号未增大，其他候选人的次序不变，那么第二次投票亦应判 x 优于 y。

公理 3 $S_1 \subset S$，在两次投票中，每个选民对 S_1 中的候选人顺序不变，那么两次判决中，S_1 中候选人的先后顺序不变。

公理 4 对于任何一对候选人 $x, y \in S$，仅当 $p(k)$ 中判 x 优

于 y，才能最后判 x 优于 y，则 $k \notin J$。

Arrow 证明，遵守上述 4 项人人皆认同的公平合理的选举是不存在的（$|S| \geqslant 3, |J| \geqslant 2$）。即十全十美的民主选举原则上是不可实现的。1972 年，Arrow 获诺贝尔经济学奖，他在其研究成果中联系了上述选举问题。

4）芝诺型悖论

一球在 A 盘中停 1 分钟传到 B 盘，在 B 盘停 $\frac{1}{2}$ 分钟传回 A 盘，在 A 盘停 $\frac{1}{4}$ 分钟传到 B 盘，在 B 盘停 $\frac{1}{8}$ 分钟传回 A 盘，依次传递，最后球在哪个盘子里？

5）秃头悖论与模糊数学

一位中年人头发尚多，无人称他是"秃子"，当他的头发脱落一根之后，仍然不是秃子，于是他结论说："一个人不是秃子，减少一根头发，他仍然不是秃子。"接着他又说："我不是秃子，所以我减少一根头发仍不是秃子；我头上的头发是有限的，每减一根我并不秃，所以减少有限次，当我头上一根头发也没有时，我仍然不是秃子。"这就是"秃头悖论"。

1965 年，美国加里福尼亚大学控制论专家 L. A. 札德（L. A. Zadeh）发表论文《模糊集合》，开辟了研究类似人是否秃头这类模糊事物的数学分支——模糊数学。对于经典的集合 A，一个元素 x，或者属于集合 A，或者不属于 A，二者必居其一，于是可以定义集合 A 的特征函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in A\\ 0, & \text{当 } x\notin A\end{cases}$$

A 的特征函数的值域为 $\{0,1\}$。札德把集合的特征函数改造成所谓"隶属函数 $\mu_A(x)$"，$\mu_A(x)$ 的值域为闭区间 $[0,1]$，$\mu_A(x_0)$ 称为 x_0 对于集合 A 的隶属度，即 x_0 属于集合 A 的程度之大小。例如 A 是秃子集合，μ_A（张三）$=0.8$，表明张三八成是个秃子。这样，不是截然把秃与不秃分开，而是谈人们秃的程度，就可以排除"秃头

悖论"了。

例如设$\underset{\sim}{A}$是青年人集合，A 下方的 ~ 号表示 A 是一个模糊集合，应该建立一个元素属于 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数．对于年龄 1，2，⋯，200，通过对实际情形的调查与拟合，得出 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数为

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant 25\\ \left[1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}, & 25<x\leqslant 50\\ 0, & 50<x\leqslant 200\end{cases}$$

如果一位 24 岁的研究生，他属于青年集合的隶属度为 100%；而一位 65 岁的教授，他隶属于青年集合 A 的隶属度为 0%，即根本不是年青人，而一个 40 岁的人，他属于青年集合 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度为

$$\left[1+\left(\frac{40-25}{5}\right)^2\right]^{-1}=0.1$$

即 40 岁的人仅仅有 10% 的隶属度，他不属于青年集合的可能已经是 90% 了！

1967 年，札德提出高阶模糊集的概念：若模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数值$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$是一个模糊集，则称 $\underset{\sim}{A}$ 是一个二阶模糊集。

1978 年，札德发表了重要论文《以模糊集合为可能性理论的基础》，讨论与概率论相似的一种"可能性理论"。

一种新的概念与理论出现之初，免不了有人说些难听的闲话，这在数学史上已屡见不鲜，模糊数学也不例外。例如有人认为"使模糊性客观化，由于缺乏这样的方法，模糊集合仍然只能是一个形而上学的小玩艺儿。"

由于模糊数学在人工智能和专家系统等方面的广泛应用，值得它来了个炸爆性的发展，如今已出现模糊拓扑、模糊群论、模糊测度与积分、模糊图论等各种模糊数学的发展方向，目前它的理论尚不够成熟，方法上也不统一，可以预期，随着信息与计算机科学的发展，模糊数学必将得到进一步的发展。

数学史上的有名悖论启发我们，悖论未必是坏东西，它倒是可以点燃数学改革与完善的火炬，预示和启动更新的创造与光明的前程。

6 社会文明与数学

数学的高水平发展,是一个国家发展高水平社会文明的必要条件。事实上,数学本身就是一种文化,它的准确性、严格性和应用广泛性,是现代社会文明的重要思维特征,数学是促进社会物质文明与精神文明的最重要的力量之一。反之,一个物质文明与精神文明都足够的社会是数学赖以发展的基本条件。这种数学与社会发展的一致性,从数学史上数学发展中心的转移可以看得很清楚,中心转移序列如下:

(1)希腊→(2)中国→(3)意大利→(4)英国→(5)法国→(6)德国→(7)美国。

事实上,相应的历史事实是(1)希腊是古代奴隶制社会最发达的地区;(2)到了封建制社会,中国则是政治经济繁荣昌盛的中心;(3)15世纪之后欧洲资产阶级革命兴起,16世纪至17世纪意大利是文艺复兴的圣地;(4)17世纪后英国的资本主义发展建立了有海上霸权的日不落帝国;(5)18世纪法国的大革命在"平等、自由、博爱"的旗帜下,巴黎成了世界的中心城市;(6)19世纪70年代,德国统一使之成为欧洲首强;(7)希特勒丧心病狂,德国成了第二次世界大战的战败国,美国政治、经济、军事跃升为世界第一。

由于数学终究是一个以个人独立思考为主的学科,与技术型学科或试验型学科不一样,所以也有与上述主流趋势不一致的反例,例如社会动荡的中国魏晋南北朝时代却出现了刘徽与祖冲之、祖暅等世界级数学泰斗,而大唐盛世数学上却成绩平平;欧洲小国波兰、捷克、匈牙利、瑞士、荷兰也出现过多位了不起的数学家,例如波兰的巴拿赫,捷克的波尔查诺和哥德尔,匈牙利的厄尔多斯和冯·诺依曼,瑞士的欧拉和伯努利家族,荷兰的布劳威尔等。

附　　录

1　数学史大事年表

（“－”号表示公元前）

－5 亿万年左右	太阳创始。
－50 亿年左右	地球创始。
－200 万年左右	人类创始。
－3000 年左右	埃及十进制记数，象形数字。
－2400 年—－1600 年	巴比伦泥板楔形文字，60 进位制记数法，勾股定理与若干组勾股数。
－2200 年左右	中国发明洛书与河图。
－1850 年—－1650 年	埃及纸草书（莫斯科纸草与莱因德纸草书）使用十进记数法与分数。
－1400 年—－1100 年	中国商高知勾三股四弦五。甲骨文中有十进制记数法。
－600 年左右	希腊泰勒斯开始命题证明。中国陈子已知勾股定理一般形式。
－540 年左右	希腊毕达哥拉斯学派提出“万物皆数”，发现且证明勾股定理，且发现无理数，引发第一次数学危机。
－500 年左右	印度《绳法经》中给出$\sqrt{2}$的近似值，并知勾股定理。
－380 年左右	希腊柏拉图给出勾股数公式。
－465 年左右	希腊伊诺皮迪斯使用无刻直尺与圆规

	进行几何作图。
-460 年左右	希腊智人学派等提出化圆为方、三等分角和倍立方三大几何作图问题。
-350 年左右	希腊门奈莫斯开始研究圆锥曲线。
-340 年左右	希腊亚里士多德奠定逻辑学基础，提出定义、公理、公设的观念。
-300 年左右	希腊欧几里得著《几何原本》，用公理法建立了第一个公理演绎数学体系。
-250 年—-212 年	希腊阿基米德用力学平衡法和穷竭法求得圆面积、球体积、牟合方盖体积等多种几何图形的面积与体积，含有定积分的原始思想。
-230 年左右	希腊埃拉托塞尼发明质数“筛法”。
-225 年左右	希腊阿波罗尼奥斯著《圆锥曲线论》。
-150 年左右	1983 年湖北江陵出土中国最早的数学书《算数书》。
-100 年左右	中国《周髀算经》成书，《九章算术》基本上定型。
62 年左右	希腊海伦给出三角形面积的海伦公式和平方根近似求法。
150 年左右	希腊托勒密著《天文学大成》，发展了三角学。
250 年左右	希腊丢番图著《算术》，解不定方程。
263 年	中国刘徽注《九章算术》，用割圆术求 π，包含极限思想。
3 世纪初	中国赵爽证明勾股定理。
300 年左右	中国《孙子算经》成书，书中出现“物不知数”问题，为中国剩余定理之萌芽。
320 年左右	希腊帕波斯著《数学汇编》，总结古希腊的数学成果。

410 年左右	希腊许帕提娅注释欧几里得、丢番图等人之著作，是历史上第一位女数学家。
462 年左右	中国祖冲之求得 π 在 3.1415926 与 3.1415927 之间，以 $\frac{22}{7}$ 为约率，$\frac{355}{113}$ 为密率，称为祖率，祖暅提出“等幂则等积”的原理，求得牟合方盖体积。
499 年	印度阿耶波多著《阿耶波多历数书》，提出 $\pi=3.1416$，以及连分数、弦度制等。
6 世纪	中国《五曹算经》、《夏侯阳算经》、《五经算术》、《张丘建算经》成书，《张丘建算经》中提出“百鸡问题”。
724 年	中国一行提出不等距内插法。
820 年	阿拉伯花拉子米著《代数学》，给出二次方程求根公式。
870 年	印度使用数码零和十进制数码，后传入欧洲，即今日之印度—阿拉伯数字的原形。
980 年左右	阿拉伯艾希瓦德制作间隔 $10'$ 的正弦与正切函数表。
1050 年左右	中国贾宪给出二项式展开系数表（贾宪三角）。
1247 年	中国秦九韶著《数书九章》，创解一次同余方程组的“大衍求一术”。
1248 年	中国李冶著《测圆海镜》，创立天元术。
1250 年	中国杨辉给出“杨辉三角”，且研究幻方。
1280 年	中国郭守敬、王恂创三次内插法。
1303 年	中国朱世杰著《四元玉鉴》，创四元术与高阶等差级数求和法。
14 世纪	珠算在中国普及。
1424 年	阿拉伯卡西著《圆周论》，求得 π 的 17 位小数。

1489 年　捷克籍德国数学家维德曼首次使用符号 + 、- 。

1545 年　意大利卡尔丹著《数学大典》(又译作《大术》),给出三次、四次方程的解法,讨论了负根与虚数;卡尔丹同年写了《游戏机遇的学说》,是概率论的先声。

1557 年　英国雷科德用"="表示相等。

1575 年　意大利毛罗利科最早使用数学归纳法。

1585 年　荷兰斯蒂文创立十进小数的记法。

1591 年　法国韦达著《分析方法入门》,创立韦达定理。

1592 年　中国程大位著《直指算法统宗》,详述珠算口诀。

1593 年　法国韦达给出 π 的第一个解析表达式。

1606 年　中国徐光启与意大利利玛窦合作把欧几里得《几何原本》前 6 卷译成中文。

1609 年　德国开普勒建立行星椭圆轨道理论。

1614 年　英国纳皮尔创立对数。

1615 年　德国开普勒著《酒桶新立体几何》,把阿基米德的求积方法推向近代积分的边缘。

1617 年　英国布里格斯制作第一个常用对数表。

1623 年　英国岗特设计对数计算尺。

1629 年　荷兰吉拉尔提出代数基本定理。

1637 年　法国笛卡儿的《几何学》出版,创立解析几何。

1637 年　法国费马提出"费马大定理"。

1640 年　法国帕斯卡著《圆锥曲线论》。

1642 年　法国帕斯卡发明加减机械计算机。

1655 年　英国沃利斯著《无穷算术》,引人无穷级数与无穷乘积,首创符号 ∞ 。

1657 年　荷兰惠更斯著《论赌博中的计算》,是概率论早期名著之一。

1665 年　英国牛顿手稿中出现"流数"概念,为微积分最早文献。

1666 年　德国莱布尼兹著《组合的艺术》,孕育了数理逻辑思想。

1670 年　英国巴罗在《几何学讲义》中引入“微分三角形”。

1673 年　德国莱布尼兹制成四则运算计算机。

1680 年　日本关孝和引入行列式概念。

1684 年　德国莱布尼兹发表第一篇微积分论文《一种求极大极小和切线的新方法》。

1687 年　英国牛顿的《自然哲学的数学原理》出版，是微积分的开山之作。

1690 年　瑞士雅各布·伯努利提出“悬链线问题”。

1691 年　法国罗尔提出罗尔定理。

1696 年　瑞士约翰·伯努利提出“速降线问题”，导出变分法。

1696 年　法国洛必达出版《无穷小分析》，建立求极限的洛必达法则。

1713 年　瑞士雅各布·伯努利《猜度术》出版，创立伯努利大数律。

1715 年　英国泰勒出版《正的和反的增量方法》，书中载有1712 年他发现的泰勒展开式。

1718 年　法国棣莫弗出版《机会论》，给出独立事件的乘法定理和二次分布。

1722 年　法国棣莫弗给出公式 $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$。

1730 年　英国斯特灵给出 $n!$ 的斯特灵公式。

1734 年　英国伯克莱出版《分析学家》，指出微积分中的逻辑缺陷，引发第二次数学危机。

1736 年　瑞士欧拉解决哥尼斯堡七桥问题，创立图论。

1742 年　英国马克劳林出版《流数通论》，给出马克劳林级数展开式。

1742 年　德国哥德巴赫与瑞士欧拉通信，提出哥德巴赫猜想。

1744 年　瑞士欧拉著《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧》，变分法诞生。

1747 年	法国达朗贝尔发表《弦振动研究》，建立弦振动方程，成为偏微分方程的开端。
1748 年—1770 年	瑞士欧拉出版《无穷小分析》、《微分学原理》、《积分学原理》。
1750 年	瑞士克莱姆给出解代数方程组的克莱姆法则。
1761 年	德国兰伯特证明 π 与 e 是无理数。
1777 年	法国蒲丰提出投针问题，且从中求得 π 的近似值，开始了几何概率的研究。
1779 年	法国贝祖著《代数方程的一般理论》，系统论述消元法。
1794 年	法国勒让德《几何学基础》出版，是当时标准的几何教科书。
1795 年	法国蒙日发表《关于把分析应用于几何的活页论文》，是微分几何的先驱性工作。
1797 年	法国拉格朗日著《解析函数论》，提出以幂级数为基础建立微积分。
1797 年	挪威韦塞尔发表论文《方向的解析表示，特别应用于平面与球面多边形的测定》，首次给出复数的几何表示。
1799 年	法国蒙日出版《画法几何学》，开创画法几何这一新分支。
1799 年	德国高斯给出代数基本定理第一个证明。
1799 年—1825 年	法国拉普拉斯 5 卷巨著《天体力学》出版，其中含拉普拉斯方程、位势函数等重要贡献。
1801 年	德国高斯出版《算术研究》，开始了近代数论研究。
1807 年	法国傅里叶研究热线导方程，提出函数的傅里叶级数表示法。

1810 年	法国热尔岗创办《纯粹与应用数学年刊》,这是最早的数学专刊。
1812 年	法国拉普拉斯著《概率的分析理论》,给出古典概率的定义,把分析理论引入概率论。
1814 年	法国柯西宣读复变函数论首篇论文《关于积分理论的报告》,开创了复变函数论的研究。
1817 年	捷克波尔查诺著《纯粹分析的证明》,首次给出连续性与导数的恰当定义,提出级数收敛性判别准则。
1818 年	法国泊松导出波动方程解的泊松公式。
1821 年	法国柯西出版《分析教程》,独立于波尔查诺提出极限、连续、导数等定义和级数收敛判别法,是分析严格化的第一部影响深远的著作。
1822 年	法国彭斯列著《论图形的射影性质》,奠定射影几何的基础。
1824 年	挪威阿贝尔证明一般五次方程不可能用根式求解,两年后他的论文《高于四次的一般方程的代数求解之不可能性的证明》发表。
1826 年	俄国罗巴切夫斯基著《附有平行线定理的一个严格证明的几何学原理简述》,首次阐明罗巴切夫斯基几何。
1826 年	挪威阿贝尔著《关于很广一类超越函数的一个一般性质》,开创了椭圆函数论。
1828 年	德国高斯著《关于曲面的一般研究》,开创曲面内蕴几何研究。
1829 年	德国雅可比著《椭圆函数论新基础》,是椭圆函数论奠基性著作。
1829 年	法国斯图姆解决在给定范围内实系数代数方程实根个数问题。

1829 年—1832 年	法国伽罗瓦彻底解决了代数方程的根式可解性问题，确立了群论的基本概念。
1832 年	匈牙利波尔约发表《绝对空间的科学》，独立于高斯和罗巴切夫斯基提出非欧几何。
1834 年	俄国奥斯特洛格拉德茨基建立三重积分与曲面积分关系的公式。
1836 年	法国刘维尔创办《纯粹与应用数学杂志》。
1837 年	德国狄利克雷发表第一篇解析数论的论文，证明了 a 与 b 互素时，$\{a+nb\}$ 序列中有无穷个素数；提出著名的狄利克雷函数 $\chi(x)$。
1840 年	法国柯西证明微分方程初值问题解的存在性。
1841 年—1856 年	德国外尔斯特拉斯进行分析严密化工作，提出 $\varepsilon-\delta$ 定义和一致收敛概念，同时提出在幂级数基础上建立复变函数论。
1843 年	英国哈密顿发明四元数。
1843 年	法国洛朗著《柯西定理的推广》，建立了洛朗级数展开理论。
1845 年	法国勒威耶和英国亚当斯同时用微分方程推算出当时尚未发现的海王星的位置。
1847 年	德国利斯廷出版《拓扑学初步》，首次给出"拓扑"这一术语，且完成了拓扑学的一些奠基性工作。
1847 年	英国布尔出版《逻辑的数学分析》，建立布尔代数。
1847 年	英国德·摩根著《形式逻辑》，对数理逻辑的发展起了很大推动作用。
1849 年—1854 年	英国凯莱提出抽象群概念。

1851 年 德国黎曼著《单复变函数的一般理论》，创立黎曼曲面的概念。

1855 年 英国凯莱引入矩阵的概念与运算。

1858 年 德国黎曼给出 ζ 函数的积分表示和黎曼猜想。

1858 年 德国墨比乌斯发现单侧曲面（墨比乌斯带）。

1859 年 俄国切比雪夫创立函数逼近论。

1859 年 中国李善兰与英国伟烈亚力合译《代数学》、《代微积拾级》以及《几何原本》后 9 卷。

1859 年 中国李善兰建立著名的组合公式——李善兰恒等式。

1861 年 德国外尔斯特拉斯给出连续但点点不可微的函数实例。

1863 年 德国狄利克雷出版解析数论的经典著作《数论讲义》。

1865 年 世界上第一个数学会伦敦数学会成立。

1866 年 俄国切比雪夫建立独立随机变量序列的大数律。

1868 年 意大利贝尔特拉米著《论非欧几何学的解释》。

1868 年 德国黎曼发表论文《用三角级数表示函数的可表示性》。

1870 年 法国若当著群论经典《置换与代数方程》。

1871 年 德国康托尔在三角级数表示的唯一性研究中首次引入集合概念。

1872 年 德国克莱因发表《埃朗根纲领》，以群论统一几何学。

1872 年 康托尔、戴德金和外尔斯特拉斯分别以基本序列、分割和单调序列的方法建立实数理论。

1873 年 法国厄米特证明 e 的超越性。

1873 年 德国李普希兹改进柯西关于微分方程柯西问题解的存在唯一性定理，提出李普希兹条件。

1874 年 挪威李开创连续变换群研究（李群）。

1875 年	俄国柯瓦列夫斯卡雅证明拟线性偏微分方程组的解的存在唯一性定理。
1879 年	德国弗雷格出版《概念语言》,建立量词理论,给出严密的逻辑公理体系。
1881 年—1886 年	法国庞加莱发表《关于由微分方程确定的曲线》,创立微分方程定性理论。
1881 年	美国吉布斯发表《向量分析基础》,开始向量分析研究。
1882 年	德国林德曼证明 π 的超越性。
1887 年	法国达布著《曲面的一般理论》,发展了活动标架法。
1889 年	意大利皮亚拿著《算术原理》,建立自然数公理体系。
1889 年	美国高尔顿在统计学中引入相关与回归等概念,开创生物统计学。
1890 年	法国比卡创立逐次逼近法证明微分方程解的存在性。
1892 年	德国巴赫曼发表《无理数的性质》,创立区间套原理。
1892 年	俄国李雅普诺夫创立微分方程稳定性理论。
1892 年—1894 年	法国庞加莱出版《天体力学新方法》,总结研究三体问题的许多新的数学方法。
1895 年	法国庞加莱著《位置几何学》,为组合拓扑学奠基。
1895 年	德国弗罗贝尼乌斯开始群表示论的系统研究。
1895 年	荷兰柯特维格和法国德弗里斯建立孤立子的 KdV 方程。
1895 年—1897 年	德国康托尔发表《关于超限数理论的基础》,

开创了超限数理论。

1897 年　英国伯恩赛德发表《有限阶群论》，是有限群的代表作。

1897 年　第一届国际数学家大会在瑞士苏黎世举行。

1898 年　英国皮尔逊创立描述统计学。

1899 年　法国贝朗特提出概率的“贝朗特悖论”，促使概率公理化。

1899 年　德国希尔伯特出版《几何基础》，给出历史上第一个完备的几何公理系统。

1900 年　德国希尔伯特在巴黎第二届国际数学家大会上作《数学问题》的报告，提出 23 个著名数学问题。

1901 年　法国庞加莱开创丢番图方程有理解的研究。

1902 年　法国勒贝格发表《积分、长度与面积》，建立勒贝格测度与勒贝格积分等现代积分理论。

1903 年　英国罗素提出“罗素悖论”，引发第三次数学危机，促进了数学基础的研究。

1904 年　法国勒贝格证明：有界函数黎曼可积的充要条件是不连续点构成一个零测集。

1904 年　英国皮尔逊用统计方法研究人的智力遗传性。

1904 年　瑞典柯克发明“柯克曲线”。

1906 年　法国弗雷歇引人函数空间概念，定义度量空间，引人泛函概念，给出泛函连续性与可微性的定义。

1906 年　俄国马尔可夫提出马尔可夫链概念。

1907 年　荷兰布劳威尔提出直觉主义数学，是构造性数学的开端。

1907 年　法国庞加莱证明了复变函数的共形映照定理。

1908 年　德国策墨罗建立第一个公理集合论公理系统，后经弗伦克尔改进成 ZF 公理系统。

1908 年　德国亨泽尔出版《代数数论》。

1908 年　德国舍恩弗利斯提出点集拓扑概念。

1909 年	德国朗道出版《素数分布讲义》，首次系统阐述解析数论。
1909 年	匈牙利里斯建立“里斯表示定理”，是泛函分析的一个里程碑。
1910 年	英国罗素和怀特海的《数学原理》出版，提出另一类集合论公理系统，促进了数理逻辑的发展。
1910 年	荷兰布劳威尔提出不动点理论，引入映射的拓扑度概念。
1911 年	俄国伯恩斯坦证明了函数逼近论中的伯恩斯坦不等式。
1911 年	荷兰布劳威尔证明了第一个不动点定理。
1911 年—1925 年	英国费希尔建立点估计理论。
1911 年	德国希尔伯特提出希尔伯特空间概念。
1913 年	法国嘉当提出旋量概念和正交群的李代数表示。
1914 年	德国豪斯道夫《集论》出版，提出拓扑空间公理系统，奠定点集拓扑基础。
1916 年	德国比伯巴赫提出关于单叶函数系数的比伯巴赫猜想。
1917 年	苏联伯恩斯坦提出最早的概率公理化问题。
1918 年	荷兰布劳威尔建立直觉主义学派。
1918 年	丹麦埃尔朗提出排队论。
1919 年	法国朱利亚开创复变函数的辐角分布理论。
1919 年	德国豪斯道夫提出分数维数。
1920 年	德国希尔伯特创立证明论。
1920 年	挪威布伦创布伦筛法，推进了哥德巴赫猜想的证明，证明了(9,9)。

1921 年　美国维纳发展了函数空间的测度论，为随机微分方程奠基。

1922 年　德国希尔伯特提出“希尔伯特纲领”，开始搞数学形式化工作。

1922 年　英国费希尔《理论统计的数学基础》出版，是现代数理统计的奠基之作。

1922 年　奥地利哈恩提出线性赋范空间，证明了共鸣定理。

1922 年　美国伯克霍夫把不动点定理推广到无穷维函数空间。

1922 年　德国诺特发表《环的理想论》，开始抽象代数的现代化工作。

1923 年　美国伯克霍夫把不动点定理用于函数方程解的存在性研究。

1923 年　波兰巴拿赫提出巴拿赫空间（完备赋范空间）的概念。

1924 年　波兰巴拿赫证明“分球怪论”。

1925 年　美籍匈牙利人冯·诺依曼发展了希尔伯特空间的自共轭算子的谱理论。

1925 年　德国诺特把组合拓扑学建立在群论的基础上，开创代数拓扑学。

1926 年　奥地利阿廷解决了希尔伯特第 17 问题。

1927 年　奥地利阿廷解决了希尔伯特第 9 问题。

1927 年　美国伯克霍夫开辟动力系统的新时代。

1927 年　德国诺特建立非交换代数理论。

1928 年　美籍德国人库朗提出解偏微分方程的差分方法。

1928 年　德国希尔伯特著《数理逻辑基础》一书出版。

1928 年　美国奈曼建立假设检验的严格数学理论。

1929 年　苏联柯尔莫戈洛夫发表《测度的一般理论和概率论》，在测度论基础上建立概率的公理体系。

1930 年　美国伯克霍夫建立格论。

1930 年　美国布什等人发明积分仪，是第一台电子模拟计算机。

1930 年　美国道格拉斯解决且推广了极小曲面问题，获 1936 年第一次颁发的菲尔兹奖。

1930 年　波兰武卡谢维奇创立多值逻辑。

1930 年　美籍奥地利人哥德尔证明一阶谓词系统的完全性。

1931 年　苏联柯尔莫戈洛夫《概率论的解析方法》出版，阐述无后效随机过程理论。

1931 年　美籍奥地利人哥德尔发表论文《数学原理及有关系统中的形式不可判定命题》，对数理逻辑有划时代的意义。

1931 年　荷兰范德瓦尔登《近世代数》出版。

1932 年　波兰巴拿赫《线性运算理论》出版，现代泛函分析成熟。

1932 年　苏联亚历山德洛夫创立代数拓扑。

1933 年　苏联柯尔莫戈洛夫《概率论的基础概念》出版，建立概率论严格的公理系统；部分解决了希尔伯特第 6 问题。

1933 年　苏联辛欣《概率论的极限定理》出版，创建平稳过程理论。

1934 年　苏联格尔丰德解决了希尔伯特第 7 问题的后半部分。

1934 年　美国莫尔斯《大范围变分法》出版，开创大范围分析理论。

1935 年　美国惠特尼给出微分流形的一般定义，提出纤维丛概念。

1935 年　美国奈曼建立区间估计理论。

1935 年　芬兰阿尔福斯提出“覆盖面理论”，获菲尔兹奖。

1936 年　苏联索伯列夫引入广义函数概念。

1936 年　英国图灵、美国丘奇·克林建立通用计算模型，定义

了算法，为计算机科学奠定了数学基础。

1937 年　苏联维诺格拉多夫证明奇数哥德巴赫猜想：每一充分大的奇数皆可表成三个素数之和。

1937 年　苏联安德罗诺夫和庞特列雅金创立微分方程结构稳定性理论。

1938 年　美国尚农建立开关网络理论，为有限自动机奠定基础。

1938 年　中国华罗庚证明“几乎全体偶数都能表示成两个素数之和”。

1939 年　罗马尼亚瓦尔德开创统计决策理论。

1939 年　法国布尔巴基学派《数学原理》开始出版。

1939 年　苏联康脱洛维奇发表《组织和计划生产的数学方法》，为线性规划理论奠基。

1940 年　法国谢瓦莱和中国段学夏用李代数方法讨论特征为零的任意域上的线性代数群，为线性代数群理论奠基。

1941 年　中国华罗庚著《堆垒素数论》，是 20 世纪数论经典之作。

1942 年　美国莱夫谢茨《代数拓扑学》出版，第一次出现代数拓扑这一名词 。

1942 年　中国陈省身作出大范围微分几何的前驱工作。

1942 年　美国莫奇利提出“高速电子管计算装置的使用”的报告，是第一个成功的通用电子计算机方案。

1943 年　美国霍珀为“Nark－I”计算机编制程序，开拓计算机语言学科。

1943 年　中国陈省身首创把纤维丛用于微分几何，推动大范围微分几何的研究。

1944 年　美籍匈牙利人冯·诺依曼《对策论与经济行为》出版，奠定对策论的基础，对数理经济学产生重大影响。

1944 年　美国艾肯制成世界上第一台通用自动计算机，是现

代电子数字计算机的先驱。

1945 年　法国施瓦尔兹《广义函数论》出版，广义函数论成为一个独立数学分支。

1945 年　美籍匈牙利人冯·诺依曼提出离散变量自动电子计算机设计方案。

1946 年　美国莫奇利和小埃克特等制成第一台电子计算机 ENIAC。

1946 年　法国韦伊《代数几何学基础》出版，为代数几何学的进一步发展奠定了严格的代数基础。

1946 年　瑞典克拉默尔《统计学的数学方法》出版，标志数理逻辑进入成熟阶段。

1947 年　美国丹齐克首次提出“线性规划”这一名词，创建单纯形方法，为线性规划奠基。

1947 年　罗马尼亚瓦尔德《序贯分析》出版，为序贯分析奠基。

1948 年　美国维纳《控制论》出版，为控制论奠基。

1948 年　美国尚农《通信的数学理论》发表，为信息论奠基。

1948 年　中国吴文俊给出微分流形切丛的斯蒂菲尔—惠特尼示性类的吴公式。

1948 年　中国钱伟长首创系统摄动法处理非线性方程。

1950 年　英国图灵《计算机能思考吗?》发表，是人工智能的经典论文。

1951 年　美国莫尔斯等《运筹学方法》出版，运筹学成为数学学科。

1953 年　美国贝尔曼《动态规划理论导引》发表，提出“动态规划”这一学科的名称，且阐述了它的最优化原理。

1956 年　中国王元证明哥德巴赫猜想之命题(2,3)。

1956 年　美国惠特尼《几何积分法》出版，开拓了微分拓扑学的新领域。

1956 年　法国嘉当和美国艾伦伯格《同调代数学》出版，是该

	学科的经典著作。
1957 年	美国贝尔曼《动态规划》出版，标志该学科的创立。
1960 年	美国鲁宾逊建立非标准分析。
1960 年	中国钱伟长建立广义变分原理，为有限元法的应用奠基。
1962 年	中国王元和潘承洞各自证明了哥德巴赫猜想之命题(1,5)和(1,4)，王元又证出(1,3)。
1962 年	美国汤普森和菲特证明了代数学的伯恩赛德猜想，是有限单群分类的重大突破。
1963 年	美国洛伦兹研究气象学提出洛伦兹方程，发现了轨线运动的混沌现象，洛伦兹被称为“混沌之父”，他提出“蝴蝶效应”，发现了洛伦兹方程的奇怪吸引子。
1963 年	美国梅尔尼科夫给出判别平面哈密顿系统微扰后是否混沌的判据梅尔尼科夫函数。
1965 年	美国札德《模糊集合》发表，开创模糊数学学科。
1966 年	中国陈景润证明哥德巴赫猜想之命题(1,2)。
1967 年	法国蒙德尔布罗发表《英国海岸线有多长?》的论文，提出“分形”新名词。
1954 年—1967 年	1954 年苏联柯尔莫哥洛夫，1963 年苏联阿诺德，1967 年美国莫塞建立 KAM 定理，给出近似的可积哈密顿系统的轨线分布问题，回答了何时受扰运动仍在环面上运动这个重要问题，是 20 世纪最重要的定理之一。
1968 年	美国贝塔朗菲《一般系统论的基础、发展和应用》出版，创建一般系统论。

1969 年　比利时普里戈金《结构、耗散和生命》发表，创立耗散结构理论。

1969 年　法国托姆《生物学中的拓扑模型》出版，首次提出突变现象的数学模型，后来创立了突变论。

1972 年　加拿大库克与卡普提出 NP－完全性问题（NPC）的概念，并用图灵机证明了"满足问题"（SAT）是 NPC 集合中的一员，建立 NP－完全性理论，论证了 NPC 中问题在时间复杂度意义下的共命运性质。提出 NP 是否等于 P 的问题。

1972 年　美国 M. 克莱因《古今数学思想》出版。

1975 年　中国李天岩和英国约克给出混沌的李—约克定义，第一次在杂志上使用"混沌"这一专用名词，且证明了[0,1]区间到自身的连续映射有周期 3 时就产生 L－Y 混沌。

1976 年　中国丘成桐证明了微分几何中的"卡拉比猜想"。

1976 年　美国阿佩尔和哈肯用计算机证明了四色猜想成立。

1976 年　德国哈肯《协同学导论》出版，开创协同学。

1977 年　国际第一届混沌会议在意大利举行，混沌学科诞生。

1977 年　美国帕里斯等人发现算术中存在不可判定的命题。

1977 年　中国吴文俊发表《初等几何判定问题与机械化证明》，给出定理机器证明的"吴方法"。

1978 年　中国丘成桐与美国舍恩用微分几何方法证明了广义相对论的正质量猜想。

1982 年　法国蒙德尔布罗著《自然界的分形几何》出版，分形几何诞生。

1981 年　许多国家上百名数学家努力，完全解决了有限单群的分类问题，即找出有限单群的所有同构类，这是当代数学的一个非平凡的成就，此项成果由 500 篇论文组成，占杂志 15000 页的版面，是数学史上最庞

大的定理。

1994 年　英国维尔斯完成费马大定理的证明。

1994 年　美国 J. Nash、德国 Selton、美国籍匈牙利人 Harsanyi 获数理经济学诺贝尔奖。

1996 年　英国 J. Mirrlees、美国 W. Vickrey、获数理经济学诺贝尔奖。

1997 年　美国 R. Merton 和 M. Scholes 获数理经济学诺贝尔奖。

2002 年　第 24 届国际数学家大会在北京举行。

2　国际数学家大会与世界级数学奖

1)国际数学家大会的年代及主办地

第　一　届:1897,瑞士,苏黎世。

第　二　届:1900,法国,巴黎。

第　三　届:1904,德国,海德堡。

第　四　届:1908,意大利,罗马。

第　五　届:1912,英国,剑桥。

第　六　届:1920,法国,斯特拉斯堡。

第　七　届:1924,加拿大,多伦多。

第　八　届:1928,意大利,波伦亚。

第　九　届:1932,瑞士,苏黎世。

第　十　届:1936,挪威,奥斯陆。

第十一届:1950,美国,坎布里奇。

第十二届:1954,荷兰,阿姆斯特丹。

第十三届:1958,英国,爱丁堡。

第十四届:1962,瑞典,斯德哥尔摩。

第十五届:1966,苏联,莫斯科。

第十六届:1970,法国,尼斯。

第 十 七 届：1974，加拿大，温哥华。

第 十 八 届：1978，芬兰，赫尔辛基。

第 十 九 届：1983，波兰，华沙。

第 二 十 届：1986，美国，伯克利。

第二十一届：1990，日本，京都。

第二十二届：1994，瑞士，苏黎世。

第二十三届：1998，德国，柏林。

第二十四届：2002，中国，北京。

国际数学家大会是规模最大、水平最高的全球性数学学术会议，一般每4年举行一次、大会邀请的报告反映近期数学科学研究中的重要成果，开幕式上举行“菲尔兹奖”颁奖仪式。每届与会数学家平均3000名。大会由国际数学联盟主办，1996年中国加入国际数学联盟。

2)菲尔兹奖

菲尔兹(J. C. Fields，1863—1932)是加拿大多伦多大学教授，1924年，任第七届国际数学家大会主席，会后他建议利用大会经费的余额为基金设立一项国际性数学奖。1932年，菲尔兹不幸病故，他遗嘱把自己的积蓄捐赠给这项国际奖。1932年第九届国际数学家大会通过设立此项数学国际奖，命名为“菲尔兹奖”。

此奖项只奖予40岁以下的有突出成就的青年数学家。菲尔兹奖是一项崇高的荣誉，有“数学诺贝尔奖”之誉，由国际数学联盟评选。

下面是菲尔兹奖得奖榜(姓名，国别，成果领域，年代)。

阿尔福斯(L. V. Ahlfors)，芬兰—美国，复分析，1936。

道格拉斯(J. Douglas)，美国，极小曲面，1936。

施瓦茨(L. Schwartz)，法国，分布理论，泛函分析，概率论，1950。

赛尔伯格(A. Selberg)，挪威—美国，解析数论，抽象调和分析，1950。

小平邦彦(Kodaira Kunihiko),日本,代数几何,1954。

塞尔(J.P.Serre),法国,代数拓扑,代数几何,1954。

托姆(R.Thom),法国,代数拓扑,微分拓扑,1958。

罗斯(K.F.Roth),英国—德国,解析数论,1958。

米尔诺(J.W.Milnor),美国,微分拓扑,代数拓扑,1962。

赫尔曼德(L.Hormander),瑞典,偏微分方程,1962。

阿蒂亚(M.F.Atiyah),英国,代数几何,代数拓扑,1966。

柯恩(P.J.Cohen),美国,连续统假设,抽象调和分析,1966。

格罗腾迪克(A.Grothendieck),法国,代数几何,泛函分析,同调代数,1966。

斯梅尔(S.Smale),美国,微分拓扑,微分动力系统,1966。

贝克(A.Baker),英国,超越数论,代数数论,1970。

广中平祐(Hironaka Heisuke),日本,代数几何,奇点理论,1970。

诺维可夫(S.P.Novikov),苏联,微分拓扑,代数拓扑,孤立子理论,1970。

汤普逊(J.G.Thompson),美国,有限群论,1970。

邦别里(E.Bombieri),意大利,解析数论,极小曲面,有限群论,1974。

曼福德(D.B.Mumford),美国,代数几何,1974。

德里涅(D.Deligne),比利时,代数几何,调和分析,多复变函数,1978。

费弗曼(C.Fefferman),美国,调和分析,多复变函数,1978。

马尔古利斯(G.A.Margulis),苏联,李群的离散子群,1978。

奎伦(D.Quillen),美国,代数K理论,1978。

孔涅(A.Connes),法国,算子代数,1983。

瑟斯顿(W.P.Thurston),美国,低维拓扑,叶状结构,1983。

丘成桐(Qiu.Cheng tung),中国—美国,微分几何,偏微分方程,相对论,1983。

唐纳逊(S.Donaldson),英国,微分拓扑,1986。

弗里德曼(M. Freedman),美国,四维庞加莱猜想,1986。

法廷斯(G. Faltings),德国,莫代尔猜想,1986。

德里菲尔德(V. Drinfeld),苏联,量子群,1990。

琼斯(V. F. R. Jones),新西兰—美国,纽结理论,1990。

森重文(Mori, Shigefumi),日本,代数几何,1990。

威顿(E. Witten),美国,超弦理论,1990。

布尔金(J. Bourgain),比利时,偏微分方程,1994。

里昂斯(P. L. Lious),法国,非线性偏微分方程,1994。

约柯兹(J. C. Yoccoz),法国,复动力系统,1994。

契尔马诺夫(E. Zelmanov),俄罗斯,有限群,1994。

博彻兹(R. E. Borcherds),英国,李代数自守形式,1998。

高尔(W. T. Gowers),英国,巴拿赫空间理论,组合学,1998。

康特谢维奇(M. Kontsevich),俄罗斯,数学物理,代数几何,拓扑学,1998。

麦克马伦(C. T. Mc Mullen),美国,复动力系统,双曲几何,1998。

3)沃尔夫奖

沃尔夫(R. Wolf, 1887—1981),犹太工业家,曾任古巴驻以色列大使,后移居以色列。1976 年出巨资设数学沃尔夫奖;由世界著名数学家组成评委会对候选人的数学成就进行综合评判,得奖者平均年龄 60 岁以上,数学成就斐然。以下是沃尔夫奖得奖榜。

盖尔范德(I. M. Gelfand),苏联,泛函分析,群表示论,1978。

西格尔(C. L. Siegel),德国,数论,多复变函数,天体力学,1978。

勒雷(J. Leray),法国,偏微分方程拓扑方法,1979。

韦依(A. Weil),法国,数论,代数几何,1979。

嘉当(H. Carfan),法国,代数拓扑,复变函数,同调代数,1980。

科尔莫戈罗夫(A. N. Kolmogorov),苏联,概率论,调和分析,动力系统,1980。

阿尔福斯(L. Ahlfors),芬兰—美国,复变函数论,1981。

扎里斯基(O. Zariski),苏联—美国,代数几何,1981。

惠特尼(H. Whitney),美国,代数拓扑,1982。

克列因(M. G. Krein),苏联,泛函分析及其应用,1982。

陈省身(Chen Shing Shen),中国—美国,整体微分几何,1984。

尼尔多斯(P. Erdös),匈牙利,数论,组合论,概率论,1984。

小平邦彦(Kodaira Kunihiko),日本,代数几何,1985。

勒维(H. Lewy),波兰—美国,偏微分方程,1985。

艾伦伯格(S. Eilemberg),波兰—美国,代数拓扑,同调代数,1986。

赛尔伯格(A. Selberg),挪威—美国,数论,调和分析,离散群,1986。

拉克斯(P. D. Lax),美国,偏微分方程及应用,1987。

伊滕清(Ito Kiyosi),日本,概率论,随机分析,1987。

赫尔曼德(L. Hörmander),瑞典,偏微分方程,1988。

希尔策布鲁赫(F. Hilzebruch),德国,拓扑学,代数几何,1988。

坎尔德隆(A. P. Caldron),阿根廷—美国,调和分析,偏微分方程,1989。

米尔诺(J. Milnor),美国,微分拓扑,1989。

德乔吉(E. de Giorgi),意大利,偏微分方程,变分法,1990。

皮亚捷茨基 - 夏皮罗(I. Piatetski - Shapiro),苏联—以色列,自守函数论,群表示论,1990。

卡尔松(L. Carleson),瑞典,函数论,1992。

汤普逊(J. G. Thompson),美国,有限群论,1992。

格罗莫夫(M. Gromov),苏联—法国,大范围微分几何及辛几何,1993。

蒂茨(J. Tits),比利时—法国,代数群及其他类群的结构理论,1993。

莫泽(J. K. Moser),德国,哈密顿系统,非线性偏微分方程,1995。

朗兰(R. Langlands)美国,调和分析,自守形式,数论,1996。
维尔斯(A. Wiles),英国,费马大定理,1996。
克勒(J. Keller),美国,波动理论,1997。
西奈(Y. G. Sinai),俄罗斯,遍历理论,1997。
洛瓦茨(L. Lovasz),匈牙利,离散数学,计算机科学,1999。
斯坦(E. M. Stein),美国,调和分析,1999。

3 中外主要数学期刊

中国,《数学学报》,1936 年创刊。
中国,《数学年刊》,1980。
中国,《数学进展》,1955。
中国,《应用数学学报》,1976。
中国,《数学的实践与认识》,1971。
中国,《数学物理学报》,1981。
中国,《数学研究与评论》,1981。
中国,《高校应用数学学报》,1987。
中国,《中国数学文摘》,1987。
中国,《数学译林》,1980。
德国,《纯粹与应用数学杂志》,1826。
英国,《剑桥哲学会数学文集》,1843。
意大利,《纯粹数学与应用数学年刊》,1850。
英国,《伦敦数学会会报》,1865。
俄国,《数学汇刊》,1865。
德国,《数学年刊》,1868。
法国,《数学与天文学通报》,1870。
法国,《法国数学会通报》,1872。
美国,《美国数学杂志》,1878。
瑞典,《数学学报》,1882。

美国,《数学年刊》,1884。
美国,《美国数学月刊》,1894。
美国,《美国数学会通报》,1894。
美国,《美国数学会会报》,1900。
德国,《数学杂志》,1918。
俄国,《俄国科学院通讯·数学部分》,1919。
波兰,《数学基础》,1920。
日本,《日本数学杂志》,1924。
英国,《伦敦数学会杂志》,1926。
美国,《纯粹与应用数学通讯》,1929。
瑞士,《瑞士数学评论》,1929。
波兰,《数学研究》,1929。
俄国,《数学进展》,1936。
日本,《数学》,1947。
日本,《日本数学会杂志》,1949。
加拿大,《加拿大数学杂志》,1949。
美国,《美国数学会文集》,1950。
法国,《傅里叶研究所杂志》,1950。
苏联,《西伯利亚数学杂志》,1960。
英国,《伦敦数学会通报》,1969。

4 中国历代纪元

(1) 五帝(黄帝、颛顼(zhuān xū)、帝喾(kù)、尧、舜)
约前26世纪—前22世纪。

(2) 夏(禹—桀,17帝王)
约前21世纪—前17世纪初。

(3) 商(汤—纣,30帝王)
约前17世纪—前11世纪。

(4) 周

西周(武王—幽王,12 帝王)

约前 11 世纪—前 256 年。

东周(平王—赧(nǎn)王,25 帝王)

前 770 年—前 256 年。

(5) 秦(昭襄王—二世皇帝(胡亥),5 帝王)

前 256 年—前 206 年,秦始皇(嬴政)统一中国前 221 年。

(6) 汉

西汉(高帝(刘邦)—更始帝(刘玄),15 帝王)

前 206 年—公元 25 年。

东汉(光武帝(刘秀)—献帝(刘协),12 帝王)

25 年—220 年。

(7) 三国

魏(文帝(曹丕)—元帝(曹奂),5 帝王)

220 年—265 年。

蜀汉(昭烈帝(刘备)—后主(刘禅),2 帝王)

221 年—263 年。

吴(大帝(孙权)—乌程侯(孙皓),4 帝王)

222 年—280 年。

(8) 晋

西晋(武帝(司马炎)—愍帝(司马邺),4 帝王)

265 年—317 年。

东晋(元帝(司马睿(ruì))—恭帝(司马德文),11 帝王)

317 年—420 年。

(9) 南北朝

南朝

宋(武帝(刘裕)—顺帝(刘準),8 帝王)

420 年—479 年。

齐(高帝(肖道成)—和帝(肖宝融),7 帝王)

479 年—502 年。

梁(武帝(肖衍)—敬帝(肖方智),4帝王)
502年—557年。
陈(武帝(陈霸先)—后主(陈叔宝),5帝王)
557年—589年。
北朝
北魏(道武帝(拓跋珪)—孝武帝(拓跋脩),14帝王)
386年—534年。
东魏(孝静帝(元善见),1帝王)
534年—550年。
北齐(文宣帝(高洋)—幼主(高恒),6帝王)
550年—577年。
西魏(文帝(元宝炬)—恭帝(元廓),3帝王)
535年—556年。
北周(孝闵帝(宇文觉)—静帝(宇文阐),5帝王)
557年—581年。
(10) 隋(文帝(杨坚)—恭帝(杨侑(yoù)),3帝王)
581年—618年。
(11) 唐(高祖(李渊)—哀帝(李柷(chù)),23帝王)
618年—907年。
(12) 五代
后梁(太祖(朱晃)—末帝(朱瑱(zhèn)),2帝王)
907年—923年。
后唐(庄宗(李存勖)—末帝(李从珂),4帝王)
923年—936年。
后晋(高祖(石敬瑭)—出帝(石重贵),2帝王)
936年—947年。
后汉(高祖(刘暠(gǎo))—隐帝(刘承佑),2帝王)
947年—950年。
后周(太祖(郭威)—恭帝(郭宗训),3帝王)
951年—960年。

（13）宋

北宋（太祖（赵匡胤）—钦宗（赵恒），9 帝王）

960 年—1279 年。

南宋（高宗（赵构）—帝昺（bǐng），9 帝王）

1127 年—1279 年。

（14）辽（太祖（耶律阿保机）—天祚帝（耶律延禧），9 帝王）

907 年—1125 年。

（15）金（太祖（完颜旻，阿骨打）—哀宗（完颜守绪），9 帝王）

1115 年—1234 年。

（16）元（太祖（成吉思汗，孛儿只斤铁木真）—顺帝（贴睦尔），18 帝王）

1206 年—1368 年。

（17）明（太祖（朱元璋）—思宗（朱由检，崇祯），17 帝王）

1368 年—1644 年。

（18）清（太祖（爱新觉罗努尔哈赤）—爱新觉罗溥仪（宣统），12 帝王）

1616 年—1911 年。

（19）中华民国　　1912 年—1949 年。

（20）中华人民共和国　1949 年—

参考文献

1 吴文俊．中国数学史大系:第一卷至第八卷．北京:北京师范大学出版社,1999

2 M.克莱因著．古今数学思想．北大数学史翻译组译．上海:上海科学技术出版社,1980

3 郭书春译注．九章算术．沈阳:辽宁教育出版社,1998

4 杜瑞芝等．简明数学史辞典．济南:山东教育出版社,1991

5 让·迪尼多内著．当代数学为了人类心智的荣耀．沈永欢译．上海:上海教育出版社,1999

6 王守义．数学九章新释．合肥:安徽科学技术出版社,1992

7 李文林．数学珍宝——历史文献精选．北京:科学出版社,1998

8 H.伊夫斯著．数学史概论．欧阳绛译．太原:山西经济出版社,1993

9 李迪．中国数学通史．南京:江苏教育出版社,1997

10 李文林．数学史教程．北京:高等教育出版社,2000

11 解延年等．数学家传．长沙:湖南教育出版社,1998

12 吴文俊．世界著名数学家传记．北京:科学出版社,1995

13 M.克莱因著．数学确定性的丧失．李宏魁译．长沙:湖南科学技术出版社,1997

14 哈代著．一个数学家的辩白．李文林编译．南京:江苏教育出版社,1996

15 邓东皋等．数学与文化．北京:北京大学出版社,1990

16 L.A.斯蒂恩主编．今日数学．马继芳译．上海:上海科学技术出版社,1982

17 王树禾．微分方程模型与混沌．合肥:中国科大出版社,1999

18 王树禾．离散数学引论．合肥:中国科大出版社,2001

19 理查德.H.戴等著．混沌经济学．傅林等译．上海:上海译文出版社,1996

20 朱家生,姚林．数学,它的起源与方法．南京:东南大学出版社,1999

21 张顺燕．数学的源与流．北京:高等教育出版社,2000

22 H.H.鲁金著．实变函数论．何旭初等译．北京:高等教育出版社,1954

23 Б.В.库图左夫著．几何学．董克诚译．北京:高等教育出版社,1957

24 王东生,曹磊．混沌,分形及其应用．合肥:中国科大出版社,1996

25 王树禾．数学模型基础．合肥:中国科大出版社,1996

26 汪芳庭．数学基础．北京:科学出版社,2002

27 王树禾．图论及其算法．合肥:中国科大出版社,1990

28 王树禾．数学聊斋．北京:科学出版社,2003

参 考 文 献

1 吴文俊．中国数学史大系:第一卷至第八卷．北京:北京师范大学出版社,1999

2 M.克莱因著．古今数学思想．北大数学史翻译组译．上海:上海科学技术出版社,1980

3 郭书春译注．九章算术．沈阳:辽宁教育出版社,1998

4 杜瑞芝等．简明数学史辞典．济南:山东教育出版社,1991

5 让·迪尼多内著．当代数学为了人类心智的荣耀．沈永欢译．上海:上海教育出版社,1999

6 王守义．数学九章新释．合肥:安徽科学技术出版社,1992

7 李文林．数学珍宝——历史文献精选．北京:科学出版社,1998

8 H.伊夫斯著．数学史概论．欧阳绛译．太原:山西经济出版社,1993

9 李迪．中国数学通史．南京:江苏教育出版社,1997

10 李文林．数学史教程．北京:高等教育出版社,2000

11 解延年等．数学家传．长沙:湖南教育出版社,1998

12 吴文俊．世界著名数学家传记．北京:科学出版社,1995

13 M.克莱因著．数学确定性的丧失．李宏魁译．长沙:湖南科学技术出版社,1997

14 哈代著．一个数学家的辩白．李文林编译．南京:江苏教育出版社,1996

15 邓东皋等．数学与文化．北京:北京大学出版社,1990

16 L.A.斯蒂恩主编．今日数学．马继芳译．上海:上海科学技术出版社,1982

17 王树禾．微分方程模型与混沌．合肥:中国科大出版社,1999

18 王树禾．离散数学引论．合肥:中国科大出版社,2001

19 理查德.H.戴等著．混沌经济学．傅林等译．上海:上海译文出版社,1996

20 朱家生,姚林．数学,它的起源与方法．南京:东南大学出版社,1999

21 张顺燕．数学的源与流．北京:高等教育出版社,2000

22 H.H.鲁金著．实变函数论．何旭初等译．北京:高等教育出版社,1954

23 Б.В.库图左夫著．几何学．董克诚译．北京:高等教育出版社,1957

24 王东生,曹磊．混沌,分形及其应用．合肥:中国科大出版社,1996

25 王树禾．数学模型基础．合肥:中国科大出版社,1996

26 汪芳庭．数学基础．北京:科学出版社,2002

27 王树禾．图论及其算法．合肥:中国科大出版社,1990

28 王树禾．数学聊斋．北京:科学出版社,2003